

Soluții clasa a XI-a:

$$1.a) \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

b) Fie $P(X) = \det(A + XB) = (\det B)X^3 + aX^2 + bX + \det A$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Cum $\det A = \det B = 0$ se obține $P(X) = \det(A + XB) = aX^2 + bX$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Dar

$$\begin{aligned} \det(A^3 + B^3) &= \det(A + B)(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon^2 B) = \\ &= (\det(A + B)(\det(A + \varepsilon B)(\det(A + \varepsilon^2 B))) = P(1)P(\varepsilon)P(\varepsilon^2) = \\ &= (a + b)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)(a\varepsilon^4 + b\varepsilon^2) = (a + b)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)(a\varepsilon + b\varepsilon^2) = \\ &= (a + b)(a^2\varepsilon^3 + ab(\varepsilon^2 + \varepsilon) + b^2\varepsilon^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a^3 + b^3), \end{aligned}$$

unde $\varepsilon \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$, adică rădăcina de ordinul 3 a unității.

În concluzie: $\det(A^3 + B^3) = a^3 + b^3$, $a, b \in \mathbb{Z}$, adică $\det(A^3 + B^3)$ este sumă a două cuburi de numere întregi.

2. a) Luăm de exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Rezultă

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ de unde găsim } (A + B)^2 = O_2, \text{ deci } (A + B)^{2016} = O_2.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ de unde găsim } (A - B)^2 = O_2, \text{ deci } (A - B)^{2016} = O_2.$$

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0, \det A \cdot \det B = -1 \neq 0.$$

b) Folosim faptul că dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$, $X^n = O_2$, $n \geq 2$, atunci $X^2 = O_2$.

$$(X^n = O_2 \Rightarrow \det X = 0 \Rightarrow X^2 = (\operatorname{tr} X) \cdot X \Rightarrow X^n = (\operatorname{tr} X)^{n-1} \cdot X = O_2 \Rightarrow \operatorname{tr} X = 0 \text{ sau } X = O_2 \Rightarrow X^2 = O_2.)$$

Revenim la problemă:

$$\text{Din } (A + B)^{2016} = O_2 \text{ rezultă } (A + B)^2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = O_2.$$

$$\text{Din } (A - B)^{2016} = O_2 \text{ rezultă } (A - B)^2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 - AB - BA + B^2 = O_2.$$

$$\text{Prin adunare obținem } A^2 + B^2 = O_2.$$

Folosind relația Cayley - Hamilton avem: $A^2 = (\operatorname{tr} A) \cdot A - (\det A) \cdot I_2$ și $B^2 = (\operatorname{tr} B) \cdot B - (\det B) \cdot I_2$

$$\text{Obținem: } (\operatorname{tr} A) \cdot A + (\operatorname{tr} B) \cdot B = (\det A + \det B) \cdot I_2. (1)$$

$$\text{Dar } (A + B)^{2016} = O_2 \text{ implică } \det(A + B) = 0 \text{ iar } (A - B)^{2016} = O_2 \text{ implică } \det(A - B) = 0.$$

$$\text{Cum } \det(A + B) + \det(A - B) = 2 \cdot (\det A + \det B) \text{ obținem } \det A + \det B = 0. (2)$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2) obținem că } (\operatorname{tr} A) \cdot A + (\operatorname{tr} B) \cdot B = O_2 \Leftrightarrow (\operatorname{tr} A) \cdot A = -(\operatorname{tr} B) \cdot B.$$

Trecând la determinant avem:

$$(\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det A = (\operatorname{tr} B)^2 \cdot \det B \Leftrightarrow (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det A = -(\operatorname{tr} B)^2 \cdot \det A \Leftrightarrow \det A \cdot [(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2] = 0.$$

$$\text{Dacă } \det A = 0 \Rightarrow \det B = 0.$$

$$\text{Dacă } (\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 = 0, \text{ cum } \operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B \in \mathbb{R} \text{ rezultă } \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0.$$

3. a) Avem succesiv:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \sqrt{n+a_1} + a_2 \sqrt{n+a_2} + \dots + a_{2016} \sqrt{n+a_{2016}}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \sqrt{n+a_1} + a_2 \sqrt{n+a_2} + \dots + a_{2015} \sqrt{n+a_{2015}} - a_1 \sqrt{n+a_{2016}} - a_2 \sqrt{n+a_{2016}} - \dots - a_{2015} \sqrt{n+a_{2016}}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_1 (\sqrt{n+a_1} - \sqrt{n+a_{2016}}) + a_2 (\sqrt{n+a_2} - \sqrt{n+a_{2016}}) + \dots + a_{2015} (\sqrt{n+a_{2015}} - \sqrt{n+a_{2016}}) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{a_1 - a_{2016}}{\sqrt{n+a_1} + \sqrt{n+a_{2016}}} + a_2 \cdot \frac{a_2 - a_{2016}}{\sqrt{n+a_2} + \sqrt{n+a_{2016}}} + \dots + a_{2015} \cdot \frac{a_{2015} - a_{2016}}{\sqrt{n+a_{2015}} + \sqrt{n+a_{2016}}} \right) = 0. \end{aligned}$$

b) Notăm $x_n = \sqrt{n+a_1} + \sqrt{n+a_2} + \dots + \sqrt{n+a_n} - n\sqrt{n+a_0}$ și alegem $a_0 = -1$. Pentru fiecare $n \geq 1$, notăm k_n numărul de termeni egali cu $+1$ din secvența $a_1, a_2, \dots, a_n$, restul fiind egali cu -1 . Obținem că $x_n = k_n \sqrt{n+1} - k_n \sqrt{n-1} = \frac{2k_n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$. Rămâne să construim șirul (a_n)

astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$. Pentru aceasta alegem $a_n = +1 \Leftrightarrow n = (2m)^2, m \in \mathbb{N}^*$. Rezultă

$$(2k_m)^2 \leq n < (2(k_m+1))^2, \text{ de unde obținem } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

NN

4. a) Deoarece funcția f este periodică, atunci există $T > 0$ astfel încât

$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Dar funcția f este neconstantă, deci există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definim șirurile $(a_n)_{n \geq 0}, a_n = x_1 + nT, \forall n \geq 0$ și $(b_n)_{n \geq 0}, b_n = x_2 + nT, \forall n \geq 0$.

Evident $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Dar $f(a_n) = f(x_1 + nT) = f(x_1)$ și

$f(b_n) = f(x_2 + nT) = f(x_2)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_1) \neq f(x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$, deci

funcția f nu are limită la $+\infty$.

b) Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$, atunci se obține $g(x+2) + g(x) = 2g(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce implică $g(x+2) - g(x+1) = g(x+1) - g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Notăm $h(x) = g(x+1) - g(x), h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, atunci $h(x+1) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția h este periodică.

Dar,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x+1) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(f(x+1) - (x+1)) - (f(x) - x)] = a - a = 0.$$

Conform punctului a) se obține că funcția h este constantă și $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Atunci $g(x+1) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, adică și funcția g este periodică și are limită la $+\infty$, deoarece

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = a$, atunci funcția g este constantă și $g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci,

$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$, este funcția căutată.