Clasa a VIII-a

1. a) Determinaţi numerele reale x, y şi z din relaţia $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy\sqrt{6} - 2yz\sqrt{15} = 0$ pentru care $x \cdot y \cdot z = 15\sqrt{6}$.

   b) Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive şi a + b + c = 2 atunci $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} < 4$.

Barem:

1 p	a) Avem: $(3x^2 - 2xy\sqrt{6} + 2y^2) + (3y^2 - 2yz\sqrt{15} + 5z^2) = 0$ $(x\sqrt{3} - y\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}\,y - \sqrt{5}z)^2 = 0$
1 p	$x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 0$ şi $y\sqrt{3} - z\sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,y$ şi $z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,y$
1 p	Relaţia $x \cdot y \cdot z = 15\sqrt{6}$ devine: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,y \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,y = 15\sqrt{6} \Rightarrow$ $\frac{y^3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{15}} = 15\sqrt{6} \Rightarrow y^3 = 15\sqrt{15} \Rightarrow y = \sqrt{15}$
1 p	$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$
2 p	b) Folosind inegalitatea $m_g \leq m_a$ (în cazul nostru $m_g < m_a$) avem: $1 \neq 1+a \Rightarrow \sqrt{1+a} = \sqrt{1 \cdot (1+a)} < \frac{1+1+a}{2} \Rightarrow \sqrt{1+a} < \frac{2+a}{2}$ $1 \neq 1+b \Rightarrow \sqrt{1+b} = \sqrt{1 \cdot (1+b)} < \frac{1+1+b}{2} \Rightarrow \sqrt{1+b} < \frac{2+b}{2}$ $1 \neq 1+c \Rightarrow \sqrt{1+c} = \sqrt{1 \cdot (1+c)} < \frac{1+1+c}{2} \Rightarrow \sqrt{1+c} < \frac{2+c}{2}$
1 p	Prin adunare obţinem: $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} < \frac{6+a+b+c}{2}$ cum $a + b + c = 2 \Rightarrow \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} < 4$
7 p	**TOTAL**

2. Fie a, b numere reale astfel încât |a| ≤ 1 şi |b| ≤ 1. Arătaţi că $|a|\sqrt{1-b^2}+|b|\sqrt{1-a^2}\leq 1.$

G.M. 4/2013

Barem:

1 p	$|a|\sqrt{1-b^2}=\sqrt{a^2(1-b^2)}$
1 p	$|b|\sqrt{1-a^2}=\sqrt{b^2(1-a^2)}$
2 p	Folosim inegalitatea mediilor, $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$
2 p	$|a|\sqrt{1-b^2}+|b|\sqrt{1-a^2}\leq\dfrac{a^2+1-b^2}{2}+\dfrac{b^2+1-a^2}{2}=$
1 p	$=1$
7 p	**TOTAL**

3. Punctele A, B şi C în această ordine, sunt situate pe un cerc de centru O şi de rază R = 12cm. Măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ şi $\widehat{CA}$ sunt invers proporţionale cu numerele 0,1(6); 0,(1) şi respectiv 0,(3). În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul cercului, cu AM = 6 cm. Calculaţi:

a) măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ şi $\widehat{CA}$;
b) perimetrul şi aria triunghiului ABC;
c) distanţa de la punctul A la planul (MBC).

Barem:

0,5 p	a) Avem $0,(3) = \frac{1}{3}$; $0,1(6) = \frac{1}{6}$; $0,(1) = \frac{1}{9}$ şi
1,5 p	$\frac{m(\widehat{AB})}{6} = \frac{m(\widehat{BC})}{9} = \frac{m(\widehat{CA})}{3} = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CA})}{6+9+3} = \frac{360°}{18} = 20°$ $m(\widehat{AB}) = 120°$ $m(\widehat{BC}) = 180°$ $m(\widehat{AC}) = 60°$
1 p	b) $m(\widehat{AB}) = 120° \Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = 60°$ $m(\widehat{BC}) = 180° \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90° \Rightarrow$ BC este diametru $\Rightarrow BC = 24$ cm $m(\widehat{AC}) = 60° \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = 30°$ $m(\sphericalangle ABC) = 30° \Rightarrow AC = \frac{BC}{2} = 12$ cm $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 24^2 - 12^2 = 12^2 \cdot 3 \Rightarrow AB = 12\sqrt{3}$ (cm)
1 p	$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 12\sqrt{3} + 12 + 24 = 36 + 12\sqrt{3} = 12(\sqrt{3} + 3)$ (cm) $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}$ (cm^2)
1 p	c) Fie $D \in (BC)$, $AD \perp BC$ şi $P \in (MD)$, $AP \perp MD$ Avem $\left.\begin{array}{r} MA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \\ AD \perp BC \end{array}\right\} \xRightarrow{T.3\,P} MD \perp BC$ (1)
1 p	Avem: $\left.\begin{array}{r} BC \subset (MBC) \\ AD \perp BC \\ MD \perp BC \\ AP \perp MD \end{array}\right\} \xRightarrow{R\,II} AP \perp (MBC) \Rightarrow d(A, (MBC)) = AP$
1 p	Din ΔABC avem: $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 12}{24} = 6\sqrt{3}$ (cm) În ΔMAD, $m(\sphericalangle MAD) = 90° \Rightarrow MD^2 = MA^2 + AD^2 \Rightarrow MD^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 36 + 108 = 144$ $\Rightarrow MD = 12$ (cm) Din ΔMAD cu $m(\sphericalangle MAD) = 90° \Rightarrow AP = \frac{MA \cdot AD}{MD} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{12} = 3\sqrt{3}$ (cm) $d(A, (MBC)) = 3\sqrt{3}$ (cm)
7 p	**TOTAL**

4. Pe planul dreptunghiului ABCD cu $AB = 6\sqrt{2}$ cm şi AD = 6 cm se ridică, de aceeaşi parte a planului dreptunghiului, perpendicularele AM, BQ şi CP cu AM = 6cm, BQ = 2 cm şi CP = 3 cm.
Determinaţi dreapta d de intersecţie a planelor (ABC) şi (MPQ) şi calculaţi distanţa de la punctul M la această dreaptă.

Barem:

2 p	Fie $AC \cap MP = \{R\}$ şi $AB \cap MQ = \{S\}$ $(ABC) \cap (MPQ) = d$ Avem: $\left.\begin{array}{l} R \in AC \subset (ABC) \\ R \in MP \subset (MPQ) \end{array}\right\} \Rightarrow R \in d$ $\left.\begin{array}{l} S \in AB \subset (ABC) \\ S \in MQ \subset (MPQ) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in d$ $\Rightarrow d = RS$ $\Rightarrow (ABC) \cap (MPQ) = RS$
1 p	Fie $F \in (RS)$, $AF \perp RS$ Avem: $\left.\begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ RS \subset (ABC) \\ AF \perp RS \end{array}\right\} \xRightarrow{T.3P} MF \perp RS \Rightarrow d(M,RS) = d(M,d) = MF$
2 p	Lungimea segmentului [RS]: Din ΔABC avem: $AC = 6\sqrt{3}$ (cm) şi $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ unde $\alpha = m(\sphericalangle BAC)$ În ΔMAR: [PC] linie mijlocie$\Rightarrow CR = 6\sqrt{3} \Rightarrow AR = 12\sqrt{3}$ (cm) În ΔMAS: $BQ \parallel MA \Rightarrow BS = 3\sqrt{2}$ (cm) $\Rightarrow AS = 9\sqrt{2}$ (cm) Fie $E \in AR$, $SE \perp AR$ În ΔASE, $m(\sphericalangle AES) = 90° \Rightarrow \sin\alpha \frac{SE}{AS} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{SE}{9\sqrt{2}} \Rightarrow SE = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{6}$ (cm) $AE^2 = SA^2 - SE^2 = (9\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{6})^2 = 162 - 54 = 108 \Rightarrow AE = 6\sqrt{3}$ (cm) $\Rightarrow ER = 6\sqrt{3}$ (cm) ΔSER: $SR^2 = ES^2 + ER^2 = (3\sqrt{6})^2 + (6\sqrt{3})^2 = 54 + 108 = 162 \Rightarrow RS = 9\sqrt{2}$ (cm)
2 p	Calculul lui MF din ΔMAF: În ΔARS avem: $AR \cdot SE = RS \cdot AF \Rightarrow AF = \frac{AR \cdot SE}{RS} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}}{9\sqrt{2}} = 12$ (cm) În ΔMAF, $m(\sphericalangle MAF) = 90° \Rightarrow MF^2 = MA^2 + AF^2 = 36 + 144 = 180$ $MF = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ (cm) $\Rightarrow d(M,RS) = 6\sqrt{5}$ (cm)
7 p	**TOTAL**

Notă: Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.