

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a XI -a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. În $M_3(\square)$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$.

b) Calculați $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2018A^{2018}$

c) Calculați $(I_3 + A)^n$, $n \in \square^*$.

Selectată de prof. Haiduc Sorina, Colegiul Național "Simion Bărnuțiu", Șimleu Silvaniei

Rezolvare:

a) $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = \det[(I_3 + A) \cdot (I_3 - A + A^2)]$
 $= \det(I_3^3 + A^3) = \det(I_3 + O_3) = \det I_3 = 1$, unde s-a folosit $A^3 = O_3$ **3p**
 (sau calcul direct)

b) $A^3 = O_3 \Rightarrow A^n = O_3, \forall n \geq 3$ **1p**

$2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2018A^{2018} = 2A + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1p**

c) $(I_3 + A)^n = C_n^0 \cdot I_3^n + C_n^1 \cdot I_3^{n-1} A + C_n^2 \cdot I_3^{n-2} A^2 + C_n^3 \cdot I_3^{n-3} A^3 + \dots + C_n^n \cdot A^n$ **1p**

Din $A^n = O_3, \forall n \geq 3$ rezultă

$(I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **1p**

Problema 2. Fie matricele $A, B, C \in M_n(\square)$ astfel încât

$$BA + BC + AC = I_n \text{ și } \det(A + B) = 0.$$

Să se demonstreze că $\det(A + B + C - BAC) = 0$.

*Selectată de prof. Hrițcu Iulian din G.M.B, nr.3/2016, Liceul Tehnologic
"Gh.Pop de Băsești", Cehu Silvaniei*

Rezolvare:

Din condiții rezultă că $I_n - BA = (A + B)C \Rightarrow$ 2p

$$A + B + C - BAC = A + B + (I_n - BA)C = (A + B)(I_n + C^2)$$
 3p

Deci $\det(A + B + C - BAC) = \det(A + B)\det(I_n + C^2) = 0$ 2p

Problema 3. Fie $a \in (0, 1)$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 \geq 0$ și $x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}$, $n \geq 0$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(n+1).$$

Selectată de prof. Ilonța Andrei din G.M. B, nr.10/2015, Colegiul Național "Silvania" Zalău

Rezolvare: Dacă $x_0 = 0$, atunci $x_n = 0$, $\forall n \in \square$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(n+1) = 0$. 1p

Fie $x_0 > 0$. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ are termenii strict pozitivi, deci $x_n > 0$, $\forall n \in \square$.

Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} = ae^{-x_n} < 1$, rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător. Fiind și

mărginit inferior de 0, rezultă că $(x_n)_{n \geq 0}$ convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $l \geq 0$. 2p

Trecând la limită în relația de recurență se obține

$$l = ale^{-l} \Leftrightarrow l(ae^{-l} - 1) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ sau } l = \ln a < 0, \text{ deci } l = 0. \quad 1p$$

Fie șirul cu termenii strict pozitivi $y_n = x_n \ln(n+1)$, $n \geq 1$. Se aplică criteriul raportului:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} \ln(n+2)}{x_n \ln(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} ae^{-x_n} = a \in (0, 1). \end{aligned} \quad 2p$$

Conform criteriului raportului, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(n+1) = 0$. 1p

Problema 4. Să se studieze natura șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 = 5^{-1}$, $x_1 = -\frac{5}{4}$, $x_{n+2} = \frac{5x_n x_{n+1}}{2x_{n+1} - 3x_n}$.

Selectată de prof. Zay Éva, Colegiul Național "Silvania" Zalău

Rezolvare:

Din relația de recurență rezultă: $2x_{n+1}x_{n+2} - 3x_nx_{n+2} = 5x_nx_{n+1}$. Împărțind cu $x_nx_{n+1}x_{n+2}$,

obținem: $\frac{2}{x_n} - \frac{3}{x_{n+1}} = \frac{5}{x_{n+2}} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{2}{5x_n} - \frac{3}{5x_{n+1}}$ **1p**

Notăm: $\frac{1}{x_n} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă:

$a_0 = 5, a_1 = -\frac{4}{5}$, și relația de recurență $a_{n+2} = \frac{2}{5}a_n - \frac{3}{5}a_{n+1}$. **1p**

Ecuția caracteristică este: $5r^2 + 3r - 2 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = \frac{2}{5}$ **1p**

Termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 0}$ se caută în forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Deci avem $a_n = c_1 (-1)^n + c_2 \left(\frac{2}{5}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ **1p**

pentru $n = 0$, respectiv $n = 1$ obținem sistemul $\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ -5c_1 + 2c_2 = -4 \end{cases}$, de unde rezultă

$c_1 = 2, c_2 = 3 \Rightarrow a_n = 2(-1)^n + 3\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2(-5)^n + 3 \cdot 2^n}{5^n} \Rightarrow x_n = \frac{5^n}{2(-5)^n + 3 \cdot 2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. **1p**

Considerăm subșirurile $(x_{2n})_{n \geq 0}$, respectiv $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ și calculăm limitele lor:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n}}{2 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1}{2} = l_1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n+1}}{-2 \cdot 5^{2n+1} + 3 \cdot 2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2n+1}} = -\frac{1}{2} = l_2$ **1p**

Deoarece $l_1 \neq l_2 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este divergent. **1p**