

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
- ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a XII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e și $x, y \in G \setminus \{e\}$ astfel încât $\text{ord}(x) = 2$, $y^6 = e$ și $xy = y^4x$. Să se arate că $\text{ord}(y) = 3$ și $xy = yx$.

2. Fie $k \in (1, +\infty)$ și $G = (-\infty, \frac{k^2-1}{k}] \cup [\frac{k^2+1}{k}, +\infty)$.

Se consideră operația $x * y = kxy - k^2(x + y) + k^3 + k, \forall x, y \in G$.

- a) Să se demonstreze că $t \in G$ dacă și numai dacă $|t - k| \geq \frac{1}{k}, \forall k \in (1, +\infty)$.
- b) Arătați că „ $*$ ” este lege de compoziție pe G .
- c) Studiați existența elementului neutru și a elementelor simetrizabile.

3. Determinați funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, știind că admite o primitivă F astfel încât

$$xf(x) + F(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}, \forall x \in (0, \infty) \text{ și } F(1) = 1 - \ln(1+e).$$

4. Calculați $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^3} e^x \sin x \, dx, x > -2$.