

Dar $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} = \dots \dots \dots 3 \text{ puncte}$

$= \frac{\frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) < \frac{1}{2}$, de unde $2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}} < 2^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$

PROBLEMA 3

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică relația $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se determine f știind că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + f(x)$ este injectivă.

(Selectată de prof. Klara Alexuțan Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” Zalău)

Soluție

$f \circ f$ este injectivă, deci f este injectivă $\dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$

$x \rightarrow f(x) \Rightarrow g(f(x)) = f(x) + f(f(x)) = f(x) + x = g(x) \dots \dots \dots 3 \text{ puncte}$

Din injectivitatea lui g rezultă $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$

PROBLEMA 4

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.

a) Demonstrați că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Demonstrați că $|z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

(Gazeta Matematică)

Soluție

a) Deoarece $|z_k| = 1$, avem $z_k \overline{z_k} = |z_k|^2 = 1$, pentru orice $k = \overline{1, n} \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$

Atunci
$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = \sum_{k=1}^n (z - z_k) \overline{(z - z_k)} = \sum_{k=1}^n (z - z_k) (\bar{z} - \bar{z}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (|z|^2 - z \bar{z}_k - \bar{z} z_k + |z_k|^2) = n|z|^2 + n - \sum_{k=1}^n (z \bar{z}_k + \bar{z} z_k) =$$

$$= n|z|^2 + n - z \sum_{k=1}^n \bar{z}_k - \bar{z} \sum_{k=1}^n z_k \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Din $\sum_{k=1}^n z_k = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{k=1}^n z_k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \bar{z}_k = 0$, deci $\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = n|z|^2 + n \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

b) Putem folosi $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$, $x_k \in \mathbb{R}$, deoarece $|z - z_k| \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Astfel $\left(\sum_{k=1}^n |z - z_k| \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 \stackrel{a)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq \sqrt{n(n|z|^2 + n)} = n\sqrt{|z|^2 + 1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Atunci $\sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq n\sqrt{|z|^2 + 1}$ și folosind $|z| \leq 1$ obținem $\sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq n\sqrt{2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$