MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI SI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI TIMIŞ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA A VIII-A

SOLUȚIE ŞI BAREM DE CORECTARE:

Subiectul I	**Punctaj**
a) Din inegalitatea $a+\frac{1}{a}\geq 2$ pentru orice a > 0, rezultă $\|10x/(5x+1)\| + \|(5x+1)/10x\|(2$ $\Rightarrow \|5x-1\| = 0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$. Se verifică faptul că $x=\frac{1}{5}$ este soluție a ecuației.	1p 1p 1p
b) Ecuația dată este echivalentă cu $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2(x-2)^2 - 4(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, -2\}$	1p 1p 1p 1p

Subiectul II	**Punctaj**
a) Inegalitatea este echivalentă cu $(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, propoziție adevărată	2p
b) Folosind inegalitatea de la a) pentru ab, bc şi ac şi însumând, obținem: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\geq 4\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]$ Din inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \Rightarrow$ $\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$, în care, înlocuind x cu $\frac{1}{a+b}$, y cu $\frac{1}{b+c}$ şi z cu $\frac{1}{c+a}$, obținem succesiv: $3\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\geq 4\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\geq\frac{4}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2$ de unde rezultă concluzia.	1p 1p 1p 1p 1p

Subiectul III	**Punctaj**
Fie M şi N mijloacele segmentelor [CD] şi [BD], AF ⊥ BC şi IL ⊥ BC⇒IL= r $\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}=\frac{AG'}{AM}\Rightarrow GG' \parallel MN \Rightarrow GG' \parallel (BCD)\,(1)$ $A_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AF}{2}=\frac{(AB+BC+CA)\cdot IL}{2}$	1p 1p 1p

Folosind faptul că 2BC = AB + AC în relația de mai sus obținem: AF = 3IL Fie K ∈ (AF) astfel încât KF = IL ⇒ KFLI este dreptunghi şi $\frac{AK}{AF} = \frac{AG}{GN} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK \parallel FN \Rightarrow GK \parallel (BCD)$ (2) Din relațiile (1) şi (2) rezultă că (GG′K) ∥ (BCD) } } ⇒ KI ⊂ (GG′K) ⇒ Din KFLI dreptunghi ⇒ KI ∥ BC ⇒ KI ∥ (BCD) } ⇒ (GG′I) ∥ (BCD)	1p 1p 1p 1p

Subiectul IV	Punctaj
a. Dacă $d = \sqrt{ab + ac + bc}$ ⇒ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ ⇒ ⇒ $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ ⇒ a = b = c ⇒ paralelipipedul este cub. Reciproc, dacă ABCDA′B′C′D′ este cub ⇒ a = b = c ⇒ are loc egalitatea din enunt b. $\{AC' \perp (A'BD) \wedge B'C' \perp (A'B'B)\} \Rightarrow \{AC' \perp A'B \wedge B'C' \perp A'B\} \Rightarrow A'B \perp AB'$ ⇒ ABB′A′ - dreptunghi cu diagonalele perpendiculare ⇒ pătrat ⇒ a = c. Analog se demonstrează că b = c, deci paralelipipedul dreptunghic este cub. Reciproc, dacă ABCDA′B′C′D′ este cub rezultă imediat relația din enunț. c. $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} + \frac{c^4 + a^4}{c^2 + a^2} = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$ $\frac{2(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2} - a^2 - b^2 + \frac{2(b^4 + c^4)}{b^2 + c^2} - b^2 - c^2 + \frac{2(c^4 + a^4)}{c^2 + a^2} - c^2 - a^2 = 0$ $\Rightarrow \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} + \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2} + \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2} = 0 \Rightarrow$ ⇒ $(a^2 - b^2)^2 = (b^2 - c^2)^2 = (c^2 - a^2)^2 = 0$ ⇒ a = b = c ⇒ ABCDA′B′C′D′ cub Reciproc, dacă a = b = c ⇒ $a^2 + a^2 + a^2 = d^2$ ⇒ $d^2 = 3a^2$ Aşadar, toate cele trei afirmații din enunț sunt echivalente cu propoziția ”Paralelipipedul este cub”, deci sunt echivalente între ele.	2p 2p 2p 1p