

Soluții și bareme orientative

Clasa a XI-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Calculul: $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, AC = CA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 18 \\ 9 & 15 & 15 \\ 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$ (2p)

b) Deoarece $AB = BA, AC = CA$ se poate aplica formula binomului lui Newton. Se observă că $I_3 - AB = A - C$. (2p)

Atunci suma cerută devine:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-AB)^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} (-C)^k = (I_3 - AB)^n - (A - C)^n = O_3. \quad (3p)$$

2. $A + B = AB \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n$ (2p)

$\Rightarrow \det(A - I_n) \neq 0, \det(B - I_n) \neq 0. (*)$ (2p)

Dar: $A + B = AB \Leftrightarrow A = (A - I_n)B$. Ținând cont de (*) rezultă: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.

(3p)

3. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \dots + 1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^{p-1}}{n!}.$ (2p)

Fie $a_n = \frac{n^{p-1}}{n!}$. Din criteriul raportului, deoarece: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} \rightarrow 0$, limita șirului

a_n este 0. În concluzie limita cerută este 0. (1p)

b) Numărul de factori ai numărătorului și numitorului bazei este m , care este fixat. Atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{n+2m}^m}{A_{n+m}^m} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2m}{n+m} \right)^n \left(\frac{n+2m-1}{n+m-1} \right)^n \dots \left(\frac{n+m+1}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n+m} \right)^n \left(1 + \frac{m}{n+m-1} \right)^n \dots \left(1 + \frac{m}{n+1} \right)^n. \end{aligned} \quad (2p)$$

$$\text{Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n+m} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{m}{n+m} \right)^{\frac{n+m}{m}} \right]^{\frac{mn}{n+m}} = e^m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n+m-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{m}{n+m-1} \right)^{\frac{n+m-1}{m}} \right]^{\frac{mn}{n+m-1}} = e^m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{m}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{m}} \right]^{\frac{mn}{n+1}} = e^m. \quad (1p)$$

Atunci limita cerută este: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{n+2m}^m}{A_{n+m}^m} \right)^n = e^{m^2}. \quad (1p)$

4. a) Pentru $n = 1$ egalitatea dată este imposibilă. (1p)

Pentru $n \geq 2$, avem $x_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$, care are sens, deci $k_{min} = 2$. (1p)

b) Demonstrăm că șirul $(x_n)_{n \geq k}$ este strict descrescător.

$$x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} > \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \Leftrightarrow (\ln(n+1))^2 > \ln n \cdot \ln(n+2). (*) \quad (2p)$$

Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\ln n \cdot \ln(n+2) < \left(\frac{\ln n + \ln(n+2)}{2} \right)^2 = \left(\frac{\ln(n^2+2n)}{2} \right)^2 < \left(\frac{\ln(n^2+2n+1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{\ln(n+1)^2}{2} \right)^2 = (\ln(n+1))^2, \text{ adică inegalitatea } (*). \quad (1p)$$

Deoarece $x_n > 0$, $(\forall) n \geq 2$ și $(x_n)_{n \geq k}$ este strict descrescător, deducem că (x_n) este mărginit. (1p)

c) Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1.$

(1p)