



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a. Se consideră numerele: $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2013}{2014}$ și $b = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1007}}{2}$.

Calculați media aritmetică a numerelor a și b.

b. Aflați între ce numere întregi consecutive este numărul

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}.$$

Subiectul 2.

Se consideră $E(m; n) = \sqrt{3 \cdot 5^m + 25^n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se arate că $E(2013; 1006) \in \mathbb{Q}$ și $E(1006; 2013) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- b) Arătați că există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m; n) \in \mathbb{Q}$.
- c) Arătați că există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m; n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Subiectul 3.

Fie patrulaterul ABCD cu $BD \cap AC = \{O\}$, O fiind mijlocul segmentului [BD]. Paralelele duse prin O la BC și CD intersectează pe AB și AD în punctele P și respectiv Q.

- a. Demonstrați că patrulaterul ABCD este paralelogram dacă și numai dacă $BD = 2PQ$.
- b. Arătați că, orice 4 numere naturale, nedivizibile cu 7, am pune în vârfurile patrulaterului, există întotdeauna cel puțin o latură sau o diagonală pentru care suma sau diferența numerelor de la capetele ei să fie un număr divizibil cu 7.

Subiectul 4.

În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = 90^\circ$, $AB = 2 DC$, diagonala BD intersectează înălțimea CE în punctul O. Dacă $M \in (OB)$, paralela prin O la AB intersectează dreapta CM în P, iar dreptele ME și AD se intersectează în N demonstrați că:

- a) triunghiul CEP este isoscel;
- b) semidreapta CE este bisectoarea unghiului NCM.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore