

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

Clasa a XII – a

1.Feladat Adott az $M(x) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+3 & -x & -x \\ -x & 2x+3 & -x \\ -x & -x & 2x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és a $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok szorzási műveletével egy Abel-féle csoportot alkot;

b) Számítsd ki P^n , $n \in \mathbb{N}^*$, ahol $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.Feladat Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport és adott a $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \text{ minden } g \in G\}$ halmaz. Igazold, hogy:

a) $Z(G)$ a G egy részcsoportja;

b) Ha $x^2 = e$, bármely $x \in G \setminus Z(G)$ elem esetén, akkor a G egy kommutatív csoport.

(az e elem a G csoport semleges elemét jelöli).

3.Feladat Számítsd ki:

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(4 - \sin^2 x)(1 + 2^x)} dx;$

b) $\int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx, \quad x \in (0, +\infty).$

4.Feladat Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amelyre teljesül a következő tulajdonság

$$f(x) = 2(1 + x^2) \cdot \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2} dt\right), \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}.$$

Igazold, hogy:

a) az f függvény deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon;

b) egy olyan f függvény létezik, amely teljesíti a fenti feltételeket. Határozd meg ezt a függvényt!

¹Munkaidő 3 óra;

²Minden feladat kötelező;

³Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.