



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 28 februarie 2016

CLASA a XI – a
(Barem)

1. a) $D_4 = -160$ și $D_5 = 1875$ 4 p

$$b) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1: C_1+C_2+\dots+C_n}{=} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_2: C_2-2C_1 \\ C_3: C_3-3C_1 \\ \dots \\ C_n: C_n-nC_1}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & n-2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{\text{dezvoltăm după } l_1}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} \stackrel{l_2: l_2-2l_1; l_3: l_3-3l_1; \dots; l_{n-1}: l_{n-1}-(n-1)l_1}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n & n & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n & n & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{schimbăm } l_1 \text{ cu } l_2 \\ \text{noua } l_2 \text{ schimbăm cu } l_3 \\ \text{noua } l_3 \text{ schimbăm cu } l_1 \\ \text{samd}}}{=} -(-1)^{n-2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n & n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{n-2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{n-1}(n+1)}{2} \dots\dots\dots 2p$$

Evident că pentru toate valorile naturale nenule pare are loc $D_n < 0$ 1p

2.	a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 3 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \sqrt{x} \circ (x^2 - 3x + 2) \circ \frac{1}{x}$. Funcția f este o compunere de trei funcții, prima strict crescătoare, a doua strict descrescătoare pe $(0, 1)$ (adică acolo unde se află $\frac{1}{x}$) și a treia strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare. 2p
	b) Se arată ușor că $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea $x_{n+1} > 2x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că toți termenii șirului $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt supraunitari. Împărțind relația de recurență cu $2 \cdot x_{n+1}$ obținem $y_{n+1} = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{y_n} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{y_n^2}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2y_n^2 - 3y_n + 1}}{y_n} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot f(y_n). \quad (*)$ $x_1 = 1; x_2 = 3 \Rightarrow x_3 = 6 + \sqrt{2}$. Rezultă $y_1 = \frac{3}{2}$ și $y_2 = \frac{6 + \sqrt{2}}{6}$. Evident $y_1 > y_2$. Funcția f fiind strict crescătoare avem $y_1 > y_2 \Rightarrow f(y_1) > f(y_2)$ și coroborat cu relația (*) se obține $y_2 > y_3$. Continuând raționamentul deducem că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. Fiind mărginit inferior de 1, șirul este convergent. 3p
	c) $x_n \geq 2x_{n-1} \geq 2 \cdot 2x_{n-2} \geq \dots \geq 2^{n-1} \cdot x_1 = 2^{n-1}$. Rezultă $\frac{x_n}{n^{2016}} \geq \frac{2^{n-1}}{n^{2016}} \rightarrow +\infty$ Conform teoremei comparației $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{2016}} = +\infty$. 2p
3.	a) Fie $L \in \mathbb{R}$ limita șirului. Trecând la limită în relația de recurență obținem $2L + L^2 = 2(L + 1)$. Cum $L \in [1, 2]$, rezultă $L = \sqrt{2}$. 1p
	b) Dacă $x_1 = \sqrt{2}$ șirul este constant $\sqrt{2}$, fiind așadar convergent la $\sqrt{2}$. Dacă $x_1 \in (1, \sqrt{2})$, atunci $x_2 = \frac{1}{2} \left(3 - \underbrace{(x_1 - 1)^2}_{\in (0, 3 - 2\sqrt{2})} \right) \in \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2} \right) \subset (\sqrt{2}, 2)$. $x_3 = \frac{1}{2} \left(3 - \underbrace{(x_2 - 1)^2}_{\in (3 - 2\sqrt{2}, 1)} \right) \in (1, \sqrt{2}).$ Evident că, inductiv, toți termenii de rang impar sunt în $(1, \sqrt{2})$ și toți cei de rang par sunt în $(\sqrt{2}, 2)$. 2p

$$x_{n+2} = -\frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + 1\right) + 1$$

$$\text{Obținem } x_{n+2} = -\frac{1}{8}x_n^4 + \frac{1}{2}x_n^3 - \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{3}{2} \quad (*)$$

$$x_{n+2} - x_n = -\frac{1}{8}x_n^4 + \frac{1}{2}x_n^3 - \frac{1}{2}x_n^2 - x_n + \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}(x_n - \sqrt{2})\underbrace{(x_n + \sqrt{2})(x_n^2 - 4x_n + 6)}_{>0}.$$

Se deduce imediat că subșirul termenilor de rang impar este strict crescător, iar subșirul termenilor de rang par este strict descrescător. Cum ambele sunt mărginite, rezultă că ambele subșiruri sunt convergente.

Dacă a și b reprezintă limitele celor două subșiruri, trecând la limită în relația de recurență (*) obținem $a = -\frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}$ și similar pentru b .

$$\text{Rezultă } \frac{1}{8}(a - \sqrt{2})\underbrace{(a + \sqrt{2})(a^2 - 4a + 6)}_{>0} = 0 \text{ și deci } a = \sqrt{2}. \text{ Analog } b = \sqrt{2}.$$

Așadar șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $\sqrt{2}$.

Similar pentru cazul în care $x_1 \in (\sqrt{2}, 2)$ 2p