



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a IX-a

Subiecte

Problema 1. (a) Determinați numerele întregi pentru care $|x+3|+|x-1|=k$
exact două soluții întregi.

(b) Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x + y = 4$, atunci $\sqrt{x-3} + \sqrt{y+1} \leq 2$.

(Supliment GM 10/2023, enunț ușor modificat)

Problema 2. Arătați că, dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are termenii strict pozitivi și

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = \frac{2n+1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ atunci } (a_n)_{n \geq 1} \text{ este o progresie aritmetică.}$$

(Concurs Viitori Olimpici.ro, 2022)

Problema 3. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$ este adevărată inegalitatea

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n-1}{n+2}.$$

(Supliment GM 11/2023)

Problema 4. Fie punctul P în planul triunghiului ABC , pentru care $a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + c \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde $BC = a, AC = b, AB = c$. Arătați că P este intersecția dintre mediana din B și bisectoarea interioară a unghiului C .

(Supliment GM 11/2023)