

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a XII-a

BAREM

1. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se definește operația $*$ prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Știind că $(G, *)$ este un grup, determinați numărul real m pentru care funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \frac{mx-1}{x+1}$ stabilește un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$.		
1.	Se deduce că $m = 1$	(2p)
	Se verifică faptul că f morfism de grupuri	(3p)
	Se verifică faptul că f este bijectivă	(2p)
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se consideră o lege de compoziție $*$ care are următoarele proprietăți: (a) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z)$, $\forall x, y, z \in M$; (b) $x * 1 = x$, $\forall x \in M$. Arătați că: (i) $2 * 4 \in \mathbb{Q}$; (ii) $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$; (iii) $\sqrt{2020} * 2020 = 2020^{1010}$.		
2.	(i) $y = z = 1 \Rightarrow x^2 = x * 2$, $y = z = 2 \Rightarrow (x * 2)^2 = x * 4$ sau $x^4 = x * 4 \Rightarrow 2 * 4 = 16 \in \mathbb{Q}$	(2p)
	(ii) $y = z = \frac{1}{2}$, apoi $y = z = \frac{1}{4}$ și obținem $4 * 4 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	(2p)
	(ii) Inductiv se arată că $x^n = x * n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$	(2p)
	Pentru $x = \sqrt{2020}$, $n = 2020$ obținem concluzia cerută	(1p)

3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_n = \int x^n \sqrt{x^2 + 1} dx$. a) Calculați I_1; b) Stabiliți o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n \geq 1}$.		
3.	a) Se not. $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$	(1p)

	$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$	(1p)
	Finalizare $I_1 = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$	(1p)
	b) $I_n = \int \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = I + I'$	(1p)
	$I = x^{n+1} \sqrt{x^2 + 1} - (n+1) I_n$	(1p)
	$I' = x^{n-1} \sqrt{x^2 + 1} - (n-1) I_{n-2}$	(1p)
	Finalizare $I_n = \frac{1}{n+2} \left(x^{n+1} \sqrt{x^2 + 1} - (n+1) I_{n-2} \right)$	(1p)
4. Determinați primitivele funcției $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{(x \cdot \cos x - \sin x)(x \cdot \sin x + \cos x)}.$		
4.	Notăm $f_1(x) = x \cdot \cos x - \sin x$ și $f_2(x) = x \cdot \sin x + \cos x$	(2p)
	$f_1(x) \cdot f_2'(x) - f_1'(x) \cdot f_2(x) = x^2$ $I = \int f(x) dx = \int \frac{f_1(x) \cdot f_2'(x) - f_1'(x) \cdot f_2(x)}{f_1(x) \cdot f_2(x)} dx$	(2p)
	$I = \int \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} dx - \int \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} dx$	(1p)
	$I = \ln f_2(x) - \ln f_1(x) + C$	(1p)
	$I = \ln x \cdot \sin x + \cos x - \ln x \cdot \cos x - \sin x $	(1p)

Barem – clasa a XII-a