

Barem de corectare

SUBIECTUL I

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele x, y și z , date prin:

$$x = \{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 3 \cdot (2^5 - 5)]\} \cdot 2^n$$

$$y = [(1 + 2 + 3 + \dots + 10) : 11 - 2]^{n-1}$$

$$z = [(1 + 2^2 : 4) - (3^2 - 2^3)]^3 \cdot (1002 : 3 - 331)$$

- a) Comparați în funcție de numărul n numerele x, y, z . Discuție.

- b) Determinați ultima cifră a numărului $t = x \cdot y \cdot z$

prof. Anca Vanț

3p a) $x = 2^n, y = 3^{n-1}, z = 3$

1p Dacă $n = 1 \Rightarrow y < x < z$

1p Dacă $n = 2 \Rightarrow y = z < x$

1p Dacă $n \geq 3 \Rightarrow z < x < y$

1p b) $t = 2^n \cdot 3^{n-1} \cdot 3 = 2^n \cdot 3^n = 6^n \Rightarrow u(t) = 6$

SUBIECTUL II

2. Împărțind numărul natural x la numărul natural y , obținem câtul 2 și restul 41.

- a) Arătați că $3x - 6y + 2$ este cubul unui număr natural.

- b) Aflați numerele x și y , știind că $x + y < 167$.

prof. Bianca Nica

4p a) $x = y \cdot 2 + 41, y > 41$

$$3x - 6y + 2 = 3(2y + 41) - 6y + 2 = 125 = 5^3$$

3p b) $x + y = 2y + 41 + y = 3y + 41$

$$x + y < 167$$

$$3y + 41 < 167 \rightarrow y < 42, \text{ dar } y > 41 \Rightarrow y \in \emptyset$$

SUBIECTUL III

3. Un elev scrie pe o foaie toate numerele naturale în ordine, începând cu 1 și terminând cu $\overline{300p}$.

Știind că $(p - 1)^{2017} = 2017^0$, aflați câte cifre are numărul scris de elev.

prof. Cozma Ildiko

2p Din condiția dată rezultă $p - 1 = 1$, adică $p = 2$

1p Atunci numărul este $123\dots 30013002$

4p Nr. total de cifre $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 2003 \cdot 4 = 10901$

SUBIECTUL IV

1. a) Completați căsuțele cu semne $<, >, =$, dând și justificări:

$$3^{16} \square 3 \cdot 32^5 \square 3 \cdot 2^{25} \square 4 \cdot 2^{25} \square 2^{27}$$

- b) Comparați numerele: $a = 8^9$ cu $b = 9^8$

(prelucrare GM)

prof.dr. Petru Braica

1p a) $3^{16} = 3 \cdot 3^{15} = 3 \cdot (3^3)^5 = 3 \cdot 27^5 \square 3 \cdot 32^5$ deci primul semn este $\square$.

1p $3 \cdot 32^5 = 3 \cdot (2^5)^5 = 3 \cdot 2^{25}$ deci al doilea semn va fi $\square$.

1p Deoarece $3 \cdot 2^{25} \square 4 \cdot 2^{25}$ următorul semn va fi $\square$.

1p $4 \cdot 2^{25} = 2^2 \cdot 2^{25} = 2^{27}$ deci ultimul semn va fi $\square$.

3p a) $b = 9^8 = (3^2)^8 = 3^{16}$ și conform punctului a) $3^{16} < 2^{27} = (2^3)^9 = 8^9 = a$
Deci $b < a$.



Barem de corectare

SUBIECTUL I

a) Arătați că numărul $A = 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2017}$ este divizibil cu 133.

prof. Vandici Florian

b) Determinați numerele naturale x , $2000 < x < 3000$, care împărțite la 6, 7 și 11 dau resturile 3, 1, respectiv 4.

[GMB 3/2016]

1p a) $A = 7(7^1 + 7^2 + \dots + 7^{2016})$

1p $A = 7[(7 + 7^2 + 7^3) + 7^3(7 + 7^2 + 7^3) + \dots + 7^{2013}(7 + 7^2 + 7^3)]$
 $A = 7(399 + 7^3 \cdot 399 + \dots + 7^{2013} \cdot 399)$

1p $A = 7 \cdot 399(1 + 7^3 + \dots + 7^{2013})$

1p $399 : 133 \Rightarrow A : 133$

1p b) Din teorema împărțirii cu rest avem egalitățile:

$$x = 6c_1 + 3; x = 7c_2 + 1; x = 11c_3 + 4$$

Dacă vom scădea 15 din fiecare egalitate vom obține că:

$$x - 15 = 6c_1 - 12 = 6(c_1 - 2) \in M_6$$

$$x - 15 = 7c_2 - 14 = 7(c_2 - 2) \in M_7$$

$$x - 15 = 11c_3 - 11 = 11(c_3 - 1) \in M_{11}$$

1p Deci $x - 15$ este multiplu comun pentru numerele 6, 7 și 11. Prin urmare $x = [6; 7; 11]k + 15$, $k \in \mathbb{N}$.

1p Din condiția $2000 < x < 3000$ obținem numerele 2325 și 2787.

SUBIECTUL II

a) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\frac{99}{\overline{abc} - a - b - c} \in \mathbb{N}$.

prof. Todoran Delia

b) Să se determine numerele prime a și b care satisfac relația: $62a^2 + 93a + b = 2017$

prof. Koczinger Eva

1p $\frac{99}{\overline{abc} - a - b - c} = \frac{99}{100a + 10b + c - a - b - c} = \frac{99}{99a + 9b} = \frac{11}{11a + b}$

1p $\frac{11}{11a + b} \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 1, b = 0$

2p Numerele căutate sunt: 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109.

2p b) Ecuația dată este echivalentă cu următoarea: $31a(2a + 3) + b = 2017$.
 2017 fiind impar, rezultă cei doi termeni ai sumei sunt de paritate diferită $\Rightarrow a = 2$ sau $b = 2$.

1p Dacă $a = 2 \Rightarrow b = 1583$ prim.

Dacă $b = 2 \Rightarrow 31a(2a + 3) = 2015 \Rightarrow a(2a + 3) = 65 = 5 \cdot 13$ fiind prim, rezultă $a = 5$ prim.

SUBIECTUL III

Se dau punctele coliniare A, B, C și D în această ordine, astfel încât: $4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9 \cdot AC$ și $BD = 18$ cm. Să se afle lungimea segmentelor BC și CD.

prof. Bendel Ida Eniko



2p	$4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9(AD - AB)$
2p	$13AB = 4AD$
1p	$13AB = 4(AB + 18) \Rightarrow AB = 8$
2p	$BC = 10; CD = 8$
SUBIECTUL IV Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri adiacente suplementare astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle AOB) + 30^\circ$. Fie semidreptele $[OM$ și $[ON$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ respectiv $\sphericalangle BOC$, semidreapta $[OF$ opusă semidreptei $[OB$ și un punct P situat în același semiplan cu F astfel încât $m(\sphericalangle MOP) = 90^\circ$ a. Arătați că punctele N, O, P sunt coliniare b. Arătați că unghiurile $\sphericalangle POC$ și $\sphericalangle POF$ sunt suplementare. prof. Pop Virgil	
2p	Bisectoarele $[OM$ și $[ON$ fiind bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare acestea formează un unghi drept $m(\sphericalangle MON) = 90^\circ$
1p	Dar $m(\sphericalangle MOP) = 90^\circ$ de aici rezultă că punctele N, O și P sunt coliniare
2p	Fie $m(\sphericalangle AOB) = x \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = x + 2x + 30 = 180^\circ \Rightarrow x = 50^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 50^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC) = 130^\circ$
2p	Se arată că $m(\sphericalangle POC) = 115^\circ$ și $m(\sphericalangle POF) = 65^\circ$ deci cele două unghiuri sunt suplementare



Barem de corectare

SUBIECTUL I

Dacă $y = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{2017}{(1008 \cdot 1009)^2}$ rezolvați ecuația $x^2 = \frac{1}{1-y}$.

prof.dr. Muntean Doina

3p	$y = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{2017}{(1008 \cdot 1009)^2}$ $= \frac{2^2 - 1^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{3^2 - 2^2}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{1009^2 - 1008^2}{(1008 \cdot 1009)^2}$ $= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1008^2} - \frac{1}{1009^2} = 1 - \frac{1}{1009^2}$
3p	Ecuația $x^2 = \frac{1}{1-y}$ devine: $\frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{1009^2}} = x^2$
1p	deci $x \in \{\pm 1009\}$.

SUBIECTUL II

1. a) Determinați $x \in \mathbb{N}$ știind că:

$$\sqrt{1 \cdot 5} + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{262} + 4 \cdot 5^{263} = 25^{3x}.$$

b) Arătați că: $\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{7} + \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{9} + \frac{\sqrt{5 \cdot 6}}{11} < \frac{5}{2}$.

prof. Stirbu Erika

1p	a) $S = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{262} + 4 \cdot 5^{263}$ Grupăm primii doi termeni și obținem: $S = 5^2 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{262} + 4 \cdot 5^{263}$
1p	Din nou grupăm primii doi termeni: $S = 5^3 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + \dots + 4 \cdot 5^{262} + 4 \cdot 5^{263}$
1p	Grupând analog, se obține: $S = 5^{263} + 4 \cdot 5^{263} = 5^{264}$
1p	$25^{3x} = (5^2)^{3x} = 5^{6x}, \text{ deci } \sqrt{5^{264}} = 5^{6x}, \text{ de unde } 5^{132} = 5^{6x}; 6x = 132, \text{ deci } x = 22$
1p	b) $\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}$ pentru $a, b \in \mathbb{R}_+$ și $a \neq b$
1p	$\sqrt{1 \cdot 2} < \frac{1+2}{2}, \dots, \frac{\sqrt{5 \cdot 6}}{11} < \frac{1}{2}$
1p	finalizare



SUBIECTUL III

Fie ABCD un romb cu $m(\angle BAD) = 20^\circ$. Construim pe laturile (AD) spre exteriorul rombului $\triangle ADF$ echilateral, respectiv pe latura (CD) spre interiorul rombului $\triangle CDE$ echilateral. Demonstrați că punctele E, B și F sunt coliniare și determinați $m(\angle DBE)$.

prof.dr. Braica Petru

2p	$\triangle ABF$ cu $AB = AF$, $m(\angle BAF) = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$, prin urmare $m(\angle ABF) = (180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$
2p	În $\triangle ECB$ cu $BC = CE$, $m(\angle BCE) = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, prin urmare $m(\angle CBE) = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$
1p	$m(\angle EBF) = m(\angle EBC) + m(\angle CBD) + m(\angle DBF) = 70^\circ + 80^\circ + (80^\circ - 50^\circ) = 180^\circ$
1p	deci are loc coliniaritatea punctelor E, B, F
1p	$m(\angle DBE) = 180^\circ - m(\angle DBF) = 150^\circ$.

SUBIECTUL IV

În trapezul ABCD oarecare, $AB \parallel CD$, AB baza mare. Fie (AM) bisectoarea unghiului $\widehat{CAB}$, $M \in [BC]$, astfel încât $[BM] \equiv [MC]$ și $DM \cap AB = \{E\}$.

a) Să se arate că DBEC este paralelogram.

b) Dacă $AM \cap CE = \{N\}$ și $BP \perp BC$, $P \in [CE]$, arătați că $2MN = BP$.

prof. Grecu Maria

2p	a) Din congruența triunghiurilor MDC și BME (ULU) rezultă că $DC = BE$
1p	Acestea sunt și paralele, rezultă că patrulaterul este paralelogram
1p	b) În triunghiul ABC, AM este mediană și bisectoare, rezultă că este isoscel
1p	Atunci AM este și înălțime, adică $AM \perp BC$
1p	$BP \perp BC$, rezultă că $MN \parallel BP$
1p	$[BM] \equiv [MC]$ rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul CBP $MN = \frac{BP}{2}$.

Barem de corectare

SUBIECTUL I

a. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(x+1) + (x+2) + \dots + (x+100) = 5150$.

b. Demonstrați egalitatea:

$$1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}} = \sqrt{2017}$$

Prof. Tămăian Traian

2p	a) $100x + 5050 = 5150$
1p	$\Leftrightarrow x = 1$
2p	b) Membrul stâng se scrie $E = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{2017-2016}$
2p	$\Rightarrow E = \sqrt{2017}$

SUBIECTUL II

a. Demonstrați inegalitatea: $n \cdot k + 1 \geq 2\sqrt{n \cdot k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$.

b. Demonstrați inegalitatea: $n^3 + n^2 + 2n \geq 4\sqrt{n}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3p	Inegalitatea mediilor
1p	$n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \geq 2\sqrt{n \cdot 1} + 2\sqrt{n \cdot 2} + \dots + 2\sqrt{n \cdot n} \Leftrightarrow$
1p	$n \cdot (1+2+3+\dots+n) + n \geq 2\sqrt{n \cdot 1} + 2\sqrt{n \cdot 2} + \dots + 2\sqrt{n \cdot n} \Leftrightarrow$
1p	$(n \cdot 1 + 1) + (n \cdot 2 + 1) + (n \cdot 3 + 1) + \dots + (n \cdot n + 1) \geq 2\sqrt{n \cdot 1} + 2\sqrt{n \cdot 2} + \dots + 2\sqrt{n \cdot n}$
1p	Dar, din inegalitatea mediilor, avem: $n \cdot 1 + 1 \geq 2\sqrt{n \cdot 1}$ $n \cdot 2 + 1 \geq 2\sqrt{n \cdot 2}$ $n \cdot 3 + 1 \geq 2\sqrt{n \cdot 3}$ $n \cdot n + 1 \geq 2\sqrt{n \cdot n}$ Prin însumarea inegalităților de mai sus se obține inegalitatea cerută



SUBIECTUL III

Se consideră un dreptunghi ABCD cu $AB=2$ și $BC=\sqrt{3}$. Punctul M aparține laturii AD astfel încât $MD = 2 \cdot AM$ și punctul N este mijlocul segmentului [AB]. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara MP și se alege punctul Q pe segmentul MP astfel încât măsura unghiului planelor (MPC) și (NPC) să fie de 45^0 , iar măsura unghiului planelor (MPC) și (QNC) să fie de 60^0 .

- Demonstrați că dreptele DN și CM sunt perpendiculare.
- Aflați lungimile segmentelor PM, respectiv QM.

1p	a) $DM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $AN = 1 \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DM}{DC}$
1p	$\triangle AND \approx \triangle DMC(LUL) \Rightarrow m(\angle DMC) + m(\angle ADM) = 90^0 \Rightarrow m(\angle DTM) = 90^0$ $DN \cap CM = \{T\}$ Deci, $DN \perp CM$
2p	b) Din punctul a) deducem ca $DN \perp (PMC)$ si fie R, S proiecțiile lui T pe CQ, respectiv PC. Din teorema celor 3 $\perp$ deducem ca $NR \perp CQ$ si $NS \perp PC$(1p) Unghiul planelor (MPC) si (NPC) este $\angle TSN$, iar unghiul planelor (MPC) si (QNC) este $\angle TRN$. Prin calcul gasim $CT = \sqrt{3}$, $RC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $MC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $TN = 1$, $TR = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $TS = 1$
2p	Din asemanarile $\triangle CRT \approx \triangle CQM$ si $\triangle CTS \approx \triangle CMP$ rezulta $QM = \frac{RT \cdot MC}{RC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ si $MP = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

SUBIECTUL IV

Considerăm cubul ABCDA'B'C'D' de muchie $AB = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Considerăm $M_k \in (A'D')$,

$N_k \in (CC')$, $P_k \in (AB)$ astfel încât: $\frac{A'M_k}{M_k D'} = \frac{C'N_k}{N_k C} = \frac{BP_k}{P_k A} = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

- Demonstrați că $\triangle M_k N_k P_k$ e echilateral.
- Demonstrați că tetraedrele $DM_k N_k P_k$ și $B'M_k N_k P_k$ sunt piramide regulate.
- Demonstrați că $(M_{k_1} N_{k_1} P_{k_1}) \parallel (M_{k_2} N_{k_2} P_{k_2})$, pentru orice $k_1 \neq k_2$, $k_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1, 2}$.

prof.dr. Braica Petru



1p	a) Avem că $C'N_k = A'M_k = BP_k$
1p	Din congruența $\Delta C'D'M_k \equiv \Delta A'AP_k \equiv \Delta BCN_k$ avem $C'M_k = A'P_k = BN_k$
1p	Prin urmare $\Delta N_kC'M_k \equiv \Delta M_kA'P_k \equiv \Delta P_kBN_k$ (C.C.), de unde concluzia
1p	b) $\Delta B'BP_k \equiv \Delta B'A'M_k \equiv \Delta B'C'N_k$ (C.C.) $\Rightarrow B'P_k = B'M_k = B'N_k$, deci $B'M_kN_kP_k$ piramidă regulată
1p	Analog $DM_kN_kP_k$.
1p	c) Din b) $\Rightarrow B'D \perp (M_kN_kP_k)$, $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$.
1p	$\left. \begin{array}{l} \text{Din } B'D \perp (M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}) \\ \\ B'D \perp (M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2}) \end{array} \right\} \Rightarrow (M_{k_1}N_{k_1}P_{k_1}) \parallel (M_{k_2}N_{k_2}P_{k_2})$

Barem de corectare

SUBIECTUL I

1. a) Să se demonstreze că $(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, pentru orice $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$.
- b) Să se arate că: $(\sqrt{2})^{2016} + (2 + \sqrt{2})^{2016} \geq 2^{2017}$

prof.Koczinger Éva

1p	Se verifică pentru $n = 0$ adevărat.
1p	Pt. $n = 1$ avem $1+x+1+\frac{1}{x} \geq 2+2=4$ utilizând inegalitatea $x+\frac{1}{x} \geq 2$ pt. $\forall x > 0$.
2p	Pentru $n \geq 2$ utilizând inegalitatea mediilor obținem $(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 2\sqrt{(1+x)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n} = 2\sqrt{\left(2+x+\frac{1}{x}\right)^n} \geq 2\sqrt{4^n} = 2^{n+1}$,
2p	$x \mapsto \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{2}$
1p	finalizare
SUBIECTUL II	
Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{3}$ și $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{2n+3}$, $(\forall) n \geq 1$.	
a) Aflați termenul general al șirului	
b) Determinați valorile numărului natural $n \geq 2$, pentru care	
$\left\{ \sum_{k=2}^n a_k \right\} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7} \right]$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x .	
prof. Galambosi Csaba	
1p	Calculul $a_2 = \frac{1}{3 \cdot 5}$, $a_3 = \frac{1}{5 \cdot 7}$
1p	$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
2p	Demonstrarea prin inducție
2p	$\sum_{k=2}^n a_k = \frac{n-1}{3(2n+1)} < 1 \Rightarrow \left\{ \sum_{k=2}^n a_k \right\} = \sum_{k=2}^n a_k$



1p	$\frac{1}{15} \leq \frac{n-1}{3(2n+1)} \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 10 \Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, \dots, 10\}$
SUBIECTUL III Să se determine funcțiile $f, g : R \rightarrow R$ știind că satisfac simultan condițiile: i) $f(x-2)+1 \leq x \leq g(x)+1, \forall x \in R$ și ii) $g(x+2)-1 \leq x \leq f(x)-1, \forall x \in R$. prof. Tămăian Traian	
1p	Din condiția i) rezultă $g(x) \geq x-1, \forall x \in R$ (1) și $f(x-2) \leq x-1, \forall x \in R$ (2)
2p	Înlocuind x cu $x+2$ din (2) rezultă $f(x) \leq x+1, \forall x \in R$ (3)
2p	Din condiția ii) rezultă $f(x) \geq x+1, \forall x \in R$ (4) și $g(x+2) \leq x+1, \forall x \in R$ (5) Înlocuind x cu $x-2$ din (5) rezultă $g(x) \leq x-1, \forall x \in R$ (6)
2p	Din relațiile (3) și (4) obținem $f(x) = x+1, \forall x \in R$ iar din (1) și (6) rezultă $g(x) = x-1, \forall x \in R$.
SUBIECTUL IV În triunghiul oarecare ABC, fie D și E simetricele lui B față de A respectiv C. Fie M, N, P și Q mijloacele segmentelor (CD), (AE), (CE) respectiv (BM), iar $BN \cap AC = \{S\}$. Demonstrați că punctele P, Q și S sunt coliniare. (***)	
1p	N mijlocul (AE) $\Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}}{2}$ S centrul de greutate $\Delta ABE \Rightarrow \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}}{3}$
1p	$\overrightarrow{BQ} = \frac{\overrightarrow{BM}}{2} = \frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}}{4} = \frac{2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{4}, \quad \overrightarrow{BP} = \frac{3\overrightarrow{BC}}{2}$
2p	$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} = \frac{2\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{BC}}{4}$
2p	$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BP} = \frac{2\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{BC}}{6}$
1p	$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PS} \Rightarrow P, Q, S$ coliniare

Barem de corectare

SUBIECTUL I	
Determinați funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(f(x+y)) = y + f(x+2015)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. prof. Popescu Călin	
2p	se demonstrează că f este injectivă fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow$ $f(x_1 + 2015) = f(x_2 + 2015)$
2p	cum $f(f(x_1 + x_2)) = f(f(x_2 + x_1)) \Rightarrow x_2 + f(x_1 + 2015) = x_1 + f(x_2 + 2015)$
1p	deci $x_2 = x_1$, adică f este injectivă
1p	pentru $y = 0$ se obține $f(f(x)) = f(x + 2015)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
1p	cum f este injectivă $\Rightarrow f(x) = x + 2015$, $\forall x \in \mathbb{R}$
SUBIECTUL II	
Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ și $E_n = z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. a) Calculați E_{15} . b) Determinați mulțimea $\{E_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. prof. Popescu Călin	
1p	a) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \Rightarrow z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$, cu $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1 + z_2 = \sqrt{2}$, $z_1 \cdot z_2 = 1$
1p	$z_1^{2015} + \frac{1}{z_1^{2015}} = z_1^{2015} + z_2^{2015}$ și $z_2^{2015} + \frac{1}{z_2^{2015}} = z_2^{2015} + z_1^{2015}$, deci $z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}} = z_1^{2015} + z_2^{2015}$
1p	$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$
1p	$z_1^{2015} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2015} \Rightarrow z_1^{2015} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \Rightarrow$ $z_1^{2015} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow z_1^{2015} = z_2$ analog $z_1^{2015} = z_2$ $E_{2015} = z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}} = z_1^{2015} + z_2^{2015} = z_2 + z_1 = \sqrt{2}$
1p	b) $E_n = z^n + \frac{1}{z^n} = z_1^n + z_2^n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{7n\pi}{4} + i \sin \frac{7n\pi}{4}$
2p	fie $k \in \mathbb{N}^*$ $n = 8k$, $E_{8k} = 2$ $n = 8k + 1$, $E_{8k+1} = \sqrt{2}$



	$n = 8k + 2, E_{8k+2} = 0$ $n = 8k + 3, E_{8k+3} = -\sqrt{2}$ $n = 8k + 4, E_{8k+4} = -2$ $n = 8k + 5, E_{8k+5} = \sqrt{2}$ $n = 8k + 6, E_{8k+6} = 0$ $n = 8k + 7, E_{8k+7} = \sqrt{2}$ $M = \{-2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\}$
SUBIECTUL III Demonstrați că pentru orice $a, b \in (1, \infty)$ are loc inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{1 + \log_a \sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \log_b a^2}} \leq \sqrt{2}.$	
prof. Tămăian Traian	
2p	Notând $\log_a b = t \in (0, \infty)$, inegalitatea se scrie echivalent $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \log_a b}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \log_b a}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow$
2p	$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{t}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{t}}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+2}} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow$
3p	$\sqrt{t} + \sqrt{2} \leq \sqrt{2(t+2)} \Leftrightarrow$ $t + 2 + 2\sqrt{2t} \leq 2(t+2) \Leftrightarrow 0 \leq t - 2\sqrt{2t} + 2 \Leftrightarrow (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2 \geq 0,$ relație adevărată.
SUBIECTUL IV Fie paralelogramul ABCD. Pe laturile AB și AC se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, spre exteriorul paralelogramului și respectiv BCF spre interiorul paralelogramului. Dacă are loc coliniaritatea punctelor E, D F, arătați că paralelogramul ABCD este romb.	
prof.dr. Braica Petru	
2p	Notăm cu a,b,c,d,e,f afixele vârfurilor A,B,C,D,E,F. Avem egalitățile imediate: $b-a = c-d, d-a = c-b, e = a+(b-a)\varepsilon$ și $f = c+(b-c)\varepsilon$, cu $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.
1p	Din condiția de coliniaritate a punctelor rezultă că $(f-d)/(e-d) = k, k \in \mathbb{R}^*$
2p	După înlocuiri obținem: $(b-a)+(b-c)\varepsilon = (b-c)k+(b-a)k\varepsilon$ sau $(b-a)(1-k\varepsilon) = (b-c)(k-\varepsilon)$.
2p	Deoarece numerele complexe $1-k\varepsilon$ și $k-\varepsilon$ au același modul, trecând la modul în ultima egalitate rezultă concluzia

Barem de corectare

SUBIECTUL I

Se dau șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, definite prin $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{2+1}{k^2(k+1)^2}$ și vectorul $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Determinați vectorul $\vec{u}$ cu proprietățile: $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ și $m\angle(\vec{u}, \vec{j}) < \frac{\pi}{2}$.

prof.dr. Doina Muntean, Satu Mare

2p	$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$, $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n \cdot (n+1)} = 1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \Rightarrow a = 2$
2p	$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \Rightarrow b = 1$
2p	$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ Fie $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow 2\alpha + \beta = 0$, $\ \vec{u}\ = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5$, Din sistemul $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ și } \beta = -2 \text{ sau } \alpha = -1 \text{ și } \beta = 2$.
1p	$m(\widehat{\vec{u}}, \vec{j}) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j}) > 0$ Dacă $\alpha = 1$ și $\beta = -2 \Rightarrow \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{j} = \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{j}\ \cdot \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j}) = 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j})$. De asemenea, $\vec{u} \cdot \vec{j} = (\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot \vec{j} = -2 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j}) < 0$ (1) Dacă $\alpha = -1$ și $\beta = 2 \Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{j} = \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{j}\ \cdot \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j}) = \sqrt{5} \cdot 1 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j})$. De asemenea, $\vec{u} \cdot \vec{j} = (-\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \vec{j} = 2 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}}, \vec{j}) > 0$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

SUBIECTUL II

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2017 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$, care satisface relația $X^{2017} + X = A$.

prof. Kovacs Bela, Satu Mare

3p	Egalitatea dată se înmulțește din stânga și din dreapta cu matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, și folosind egalitatea $AX = XA$, rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
2p	Demonstrăm că $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, apoi din relația problemei rezultă $a^{2017} + a = 2$ și $2017a^{2016} \cdot b + b = 2017$

2p	Singura soluție a primei ecuații este $a = 1$, iar din a doua ecuație obținem $b = \frac{2017}{2018}$.
SUBIECTUL III Fie șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + 2n + 1}$, $n \geq 1$. d) Să se arate că: $\frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq x_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$. e) Calculați limita șirului $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. f) Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{n+1} \right)$ prof. Kovacs Bela, Satu Mare	
2p	a) Termenul general al șirului dat este o sumă cu $2n+1$ termeni, care se va majora respectiv minora prin micșorarea respectiv mărirea numitorului
2p	b) Aplicăm teorema cleștelui și obținem că șirul este convergent și are limita 0.
3p	c) Limita a doua tot pe baza teoremei cleștelui este egală cu 2.
SUBIECTUL IV a) Calculați limita: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right)^x$. b) Să se determine funcția $f: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică condiția: $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2 - 2x.$ prof. Kovacs Bela, Satu Mare	
3p	a.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x(x-1)} \right)^{\frac{x(x-1)}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{x-1}} = e^2$
4p	b.) Înlocuim pe x cu $\frac{x-1}{x}$. Obținem: $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 2 - 2 \cdot \frac{x-1}{x}$ Apoi înlocuim pe x cu $\frac{1}{1-x}$. Obținem: $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2 - 2 \cdot \frac{1}{1-x}$ Adunând cele două relații, obținem:



$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 2 - 2 \cdot \frac{x-1}{x} + 2 - 2 \cdot \frac{1}{1-x}$$

Utilizăm relația dată, urmează:

$$2f(x) + 2 - 2x = 2 - 2 \cdot \frac{x-1}{x} + 2 - 2 \cdot \frac{1}{1-x}$$

Din care rezultă relația:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \text{ ceea ce satisface relația cerută.}$$

Barem de corectare

SUBIECTUL I

a) Calculați derivata funcției $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{e^{\arctg x}(x^2 + ax + b)}{x^2 + 1}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

b) Calculați: $\int e^{e^{x^2} + x^2 + \ln x} dx$, $x \in (0, \infty)$

c) Calculați: $\int \frac{(x+2)e^{\arctg x}}{(x^2 + 1)^2} dx$, $x \in (0, \infty)$.

prof. Tămăian Traian

2p a) $g'(x) = \frac{e^{\arctg x}[(1-a)x^2 + (a-2b+2)x + a+b]}{(x^2 + 1)^2}$

2p b) Integrala se scrie $I = \int e^{e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot e^{\ln x} dx = \int x e^{e^{x^2}} \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int (e^{x^2})' e^{e^{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int (e^{e^{x^2}})' dx = \frac{1}{2} e^{e^{x^2}} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

2p c) Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{(x+2)e^{\arctg x}}{(x^2 + 1)^2}$. Căutăm o primitivă de forma $F(x) = \frac{e^{\arctg x}(x^2 + ax + b)}{x^2 + 1}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$. Folosind a) avem $F'(x) = \frac{e^{\arctg x}[(1-a)x^2 + (a-2b+2)x + a+b]}{(x^2 + 1)^2}$.

1p Punând condiția $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și identificând coeficienții rezultă $a=b=1$ și deci $I = \frac{e^{\arctg x}(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL II

Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, se consideră $I_n = \int \sqrt[n]{x^{n^2} + x^{n^2-n}} dx$, $x \in (0, \infty)$

a) Calculați I_2

b) Calculați I_n , $n \geq 2$.

prof. Tămăian Traian

3p a) Avem $I_2 = \int \sqrt{x^4 + x^2} dx = \int x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)' dx = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

2p b) Integrala se scrie $I_n = \int \sqrt[n]{x^{n^2-n} (x^n + 1)} dx = \int (x^n + 1)^{\frac{1}{n}} \cdot x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int (x^n + 1)^{\frac{1}{n}} \cdot (x^n + 1)' dx =$

2p $= \frac{1}{n} \frac{(x^n + 1)^{\frac{1}{n} + 1}}{\frac{1}{n} + 1} + C = \frac{(x^n + 1)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III

Fie $a, b \in \mathbf{R}$ fixate și $a^2 + b^2 \neq 0$. Considerăm mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2 + bx & 2ax & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R} \right\} \subset M_3(\mathbf{R})$$

a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbf{R}, +)$.

1p	a) Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2 + bx & 2ax & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ay & 1 & 0 \\ a^2y^2 + by & 2ay & 1 \end{pmatrix} \in G$ $\Rightarrow X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a(x+y) & 1 & 0 \\ a^2(x+y)^2 + b(x+y) & 2a(x+y) & 1 \end{pmatrix} \in G$. Deci G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$.
2p	b) G_1) Înmulțirea matricelor este asociativă $\Rightarrow (XY)Z = X(YZ)$, $(\forall) X, Y, Z \in G$. G_2) Există $I_3 \in G$ a.î. $X \cdot I_3 = I_3 \cdot X = X$, $(\forall) X \in G$.
2p	G_3) Pentru orice $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2 + bx & 2ax & 1 \end{pmatrix} \in G$ $\Rightarrow (\exists) X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2 + (-b)x & 2ax & 1 \end{pmatrix} \in G$ (căci $\det X = 1 \neq 0$), astfel încât $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_3$. G_4) $X \cdot Y = Y \cdot X$, $(\forall) X, Y \in G$. Rezultă că $(G, \cdot)$ grup abelian
2p	Funcția $f: G \rightarrow \mathbf{R}$, $f(X) = x$, unde X este matricea de mai sus, satisface condițiile: i) $f(X \cdot Y) = f(X) + f(Y)$, $(\forall) X, Y \in G$. ii) f bijectivă. Rezultă că $(G, \cdot) \simeq (\mathbf{R}, +)$.

SUBIECTUL IV

Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, o funcție derivabilă, cu proprietățile $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ și $f'(x) \geq 1$, $\forall x \in [0,1]$.

a) Arătați că există o funcție f cu proprietățile date.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x) + 1} dx \leq \frac{\pi}{4}$.

prof. Tămâian Traian

1p	a) De exemplu funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x$.
----	--



2p	b) Fie f o funcție cu proprietățile din enunț. Cum $f'(x) \geq 1, \forall x \in [0,1]$, rezultă că $\frac{1}{f^2(x)+1} \leq \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}, \forall x \in [0,1]$.
1p	Integrând ultima inegalitate rezultă $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1} dx \leq \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} dx \quad (1)$
2p	Dar $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} dx = \arctg f(x) \Big _0^1 = \arctg f(1) - \arctg f(0) = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$. Deci $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} dx = \frac{\pi}{4} \quad (2)$
1p	Din (1) și (2) rezultă că $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1} dx \leq \frac{\pi}{4}$.