



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013**

CLASA a XI - a

Subiectul 1

- a) Arătați că oricare matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică ecuația $X^2 - \text{Tr}(A) \cdot X + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, numită ecuația lui Cayley-Hamilton.
- b) Arătați că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface egalitatea $A^4 = I_2$, atunci $A^2 = I_2$ sau $A^2 = -I_2$.

* * *

Subiectul 2

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care verifică relațiile $A^{2002} = A^{2003}$ și $A + B = I_n$.
Arătați că $I_n - AB$ este matrice inversabilă.

(G.M.3/2003-Claudiu Coandă)

Subiectul 3

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale definit prin $x_0 = a > 0, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n}, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

Calculați:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{x_n^2}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$

* * *

Subiectul 4

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin
 $x_1 \in (1, 2), x_{n+1} = 1 + \sqrt{2x_n - x_n^2}, (\forall) n \geq 1$.
Să se studieze convergența șirului.

* * *

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore**