

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 FEBRUARIE 2019
CLASA a VIII-a – BAREM

Subiectul 1. Demonstrați că numărul $x = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ este număr natural impar oricare ar fi numărul natural n .

Rezolvare:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \dots = (n^2+3n+1)^2 \quad \dots 3p.$$

$x = n^2 + 3n + 1$ este număr natural, oricare ar fi numărul natural n ...1p.

$x = n(n+3)+1$ și cum numerele naturale n și $n+3$ au parități diferite, produsul lor este număr par, deci x este număr impar ...3p.

Subiectul 2.

a. Arătați că pentru orice numere reale pozitive x, y, z este adevărată relația $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz}$.

b. Demonstrați că $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z .

(G.M.-B, nr. 10 / 2018)

Rezolvare:

a) $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow x^2y - 2x\sqrt{yz} + y \geq 0$.

$$\left(x\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \geq 0 \text{ adevărat pentru orice numere reale pozitive } x, y, z \quad \dots 3p.$$

Obs. Se poate obține relația și folosind inegalitatea mediilor

b) Folosind relația demonstrată la subpunctul a) se obține $\frac{x}{x^2y+z} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}}$... 1p.

Din inegalitatea mediilor: $\sqrt{yz} \geq \frac{2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, oricare ar fi $y, z > 0$...1p

Scriind relațiile echivalente și pentru celelalte litere și însumând obținem:

$$\frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \text{ și concluzia} \quad \dots 2p.$$

Subiectul 3.

În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $AC = 12$ cm și $AM = 10$ cm, punctul M este mijlocul laturii BC , iar punctele T și S sunt proiecțiile punctului M pe dreptele AC , respectiv AB . Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara MP , unde $MP = 8$ cm. Determinați:

- distanța de la punctul P la dreapta AC ;
- distanța de la punctul M la planul (PST) .

Rezolvare:

a) Aplicarea teoremei celor trei perpendiculare, $PT \perp AC$, deci $d(P, AC) = PT$... 1p.

$AM = 10$ cm $\Rightarrow BC = 20$ cm, deci $AB = 16$ cm (t.Pitagora), $MT = 8$ cm (linie mijlocie) ... 1p.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PMT se obține $PT = 8\sqrt{2}$ cm ... 1p.

b) Construim: $MQ \perp ST$, $Q \in ST$ și $MR \perp PQ$, $R \in PQ$ și se demonstrează că $MR \perp (PST)$, deci

$$d(M, (PST)) = MR \quad \dots 2p.$$

$$\text{Se obține, prin calcule, } MR = \frac{12\sqrt{34}}{17} \quad \dots 2p.$$

Subiectul 4. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu baza pătratul $ABCD$, G este centrul de greutate al triunghiului VAC , F este centrul de greutate al triunghiului ABD și M este mijlocul segmentului $[BG]$. Demonstrați că $FM \parallel (VDC)$.

Rezolvare:

Punctul $G \in VO$, unde $AC \cap BD = \{O\}$ și $\frac{VG}{OG} = 2$, iar $F \in AO$ cu $\frac{AF}{FO} = 2$... 1p.

Dacă $P \in BO$ și $Q \in DO$ sunt centrele de greutate în triunghiurile ABC , respectiv ADC , atunci

$$\frac{AF}{FO} = \frac{BP}{PO} = 2, \text{ de unde } FP \parallel AB \parallel DC \quad (1) \quad \dots 2p.$$

$$\frac{VG}{GO} = \frac{DQ}{QO} = 2, \text{ de unde } GQ \parallel VD \text{ și } MP \text{ linie mijlocie în triunghiul } BGQ,$$

de unde $MP \parallel GQ \parallel VD$ (2) ... 2p.

Din (1) și (2) obținem $(FPM) \parallel (VDC)$. Cum $FM \subset (FPM)$ obținem $FM \parallel (VDC)$... 2p.