

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a X -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră numărul complex z , cu proprietatea că $|z| < \frac{1}{2}$. Demonstrați că
- $$|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{3}{4}.$$

Soluție:

Din proprietatea referitoare la modulul produsului și din ipoteză rezultă că: $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| = |z| \cdot |(1+i) \cdot z^2 + i| < \frac{1}{2} \cdot |(1+i) \cdot z^2 + i|$

Folosind inegalitatea între modulul sumei și suma modulelor se obține: $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{1}{2} \cdot [| (1+i) \cdot z^2 | + |i|] = \frac{1}{2} \cdot [1 + |z|^2 + 1] = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \right) < \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3}{4}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $ (1+i) \cdot z^3 + i \cdot z = z \cdot (1+i) \cdot z^2 + i < \frac{1}{2} \cdot (1+i) \cdot z^2 + i $	2p
Deduce $ (1+i) \cdot z^3 + i \cdot z < \frac{1}{2} \cdot [1 + z ^2 + 1]$	2p
Arată că $ (1+i) \cdot z^3 + i \cdot z < \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \right)$	2p
Finalizare: $ (1+i) \cdot z^3 + i \cdot z < \frac{3}{4}$	1p

2. Se consideră M_0, M_1, M_2 imaginile în planul complex ale rădăcinilor ecuației $z^3 = 1$.

Dacă $M(\cos t + i \sin t)$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, să se demonstreze că $MM_2 = MM_0 + MM_1$.

Soluție:

Dacă z_0, z_1, z_2 sunt rădăcinile ecuației $z^3 = 1$, atunci $M_0(1)$, $M_1(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$,

$M_2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$

$$MM_2 = \left| \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} - \cos t - i \sin t \right| = \left| \left(-\frac{1}{2} - \cos t \right) + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t \right) \right|$$

$$= \sqrt{2 + \cos t + \sqrt{3} \sin t} =$$

$$\sqrt{2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos t + \sin \frac{\pi}{3} \sin t \right)} = \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - t \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2} \right)}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2} \right)$$

deoarece dacă $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2} \in (-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și prin urmare $\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2} \right) > 0$.

$$MM_1 = \left| \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} - \cos t - i \sin t \right| = \left| \left(-\frac{1}{2} - \cos t \right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t \right) \right|$$

$$= \sqrt{2 + \cos t - \sqrt{3} \sin t} =$$

$$\sqrt{2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos t - \sin \frac{\pi}{3} \sin t \right)} = \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + t \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2} \right)}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2} \right)$$

deoarece dacă $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și prin urmare $\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2} \right) > 0$.

$$MM_0 = |\cos t + i \sin t - 1| = \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} =$$

$2 \sin \frac{t}{2}$, deoarece dacă $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\frac{t}{2} \in (0, \frac{\pi}{4}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ și prin urmare $\sin \frac{t}{2} > 0$.

$$MM_2 = MM_0 + MM_1 \Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) = 2 \sin\frac{t}{2} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\frac{\pi}{6} \sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$$

Obținem $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$, care este adevărată.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Determinarea afixelor punctelor M_0, M_1, M_2	1p
Deduce $MM_2 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right)$	2p
Deduce $MM_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)$	2p
Deduce $MM_0 = 2 \sin\frac{t}{2}$	1p
Demonstrează că $MM_2 = MM_0 + MM_1 \Leftrightarrow 2 \sin\frac{\pi}{6} \sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$, de unde egalitatea de demonstrat este adevărată	1p

3. a) Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi. Demonstrați că $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Se consideră $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1. Demonstrați că $\lg \left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right) \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică, prin urmare $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$

Cum $a_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aplicăm inegalitatea mediilor și obținem

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Cum $b_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aplicăm inegalitatea mediilor și obținem

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}. \text{ Deoarece funcția } \lg: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ este strict crescătoare}$$

$$\text{obținem } \lg \left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right) \geq \lg \left(\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} \right) = \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n}.$$

Dar $b_n > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lg b_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$. Mai mult, deoarece

$(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică, să preupunem de rație q , avem $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, \forall n \geq 1$.

Atunci dacă considerăm șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ definit prin $c_n = \lg(b_n)$, avem $c_n > 0, \forall n \geq 1$

și $c_{n+1} - c_n = \lg(b_{n+1}) - \lg(b_n) = \lg \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} \right) = \lg q = \text{const}$, deci $(c_n)_{n \geq 1}$ este o

progresie aritmetică cu termeni pozitivi.

$$\text{Aplicăm acum a) și avem } \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică deci $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	1p
Folosind inegalitatea mediilor avem $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \geq 1$	2p
Din inegalitatea mediilor avem $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$	1p
Arată că $\lg \left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right) \geq \lg \left(\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} \right) = \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n}$	1p
Arată ca șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi	1p
Aplicăm acum a) și avem $\frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$	1p

4. Să se verifice dacă există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Presupunem prin reducere la absurd că există o funcție injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă luăm $x = 1$ avem $f(2023) + f(2025) = 2024$ deci $f(2023) = 2024 - f(2025)$.

Dacă luăm $x = \log_{2023}(2025)$ avem $f(2023^{\log_{2023}(2025)}) + f(2025^{\log_{2023}(2025)}) = 2024$.

Prin urmare $f(2025) + f(2025^{\log_{2023}(2025)}) = 2024$, deci $f(2025^{\log_{2023}(2025)}) = 2024 - f(2025)$.

Prin urmare $f(2025^{\log_{2023}(2025)}) = f(2023)$.

Cum f este injectivă avem $2025^{\log_{2023}(2025)} = 2023$, de unde $(\log_{2023}(2025))^2 = 1$, contradicție. Prin urmare nu există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \forall x \in \mathbb{R}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Presupunem prin reducere la absurd că există o funcție injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \forall x \in \mathbb{R}$.	1p
$x = 1$ rezultă $f(2023) = 2024 - f(2025)$.	1p
$x = \log_{2023}(2025)$ rezultă $f(2025^{\log_{2023}(2025)}) = 2024 - f(2025)$	2p
$f(2025^{\log_{2023}(2025)}) = f(2023)$, f injectivă $2025^{\log_{2023}(2025)} = 2023$	1p
$(\log_{2023}(2025))^2 = 1$, contradicție	1p
Concluzia	1p