Olimpiada de matematică, Faza locală, Braşov, 21 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a V-a

V 1. a) $a = 5^{2n+1} \cdot 2^{6n+4} + 5^{2n+1} \cdot 2^{6n+2}$;

.... **2p**

$a = 2^{6n+2} \cdot 5^{2n+2}$;

.... **1p**

$a = \left(2^{3n+1} \cdot 5^{n+1}\right)^2$ - pătrat perfect.

.... **1p**

b) $b = 2^{2015} - 6$;

.... **2p**

$b = 2\left(2^{2014} - 3\right)$; $2^{2014} - 3$ este impar; b nu este pătrat perfect.

.... **1p**

V 2. a) Ultima cifră a unui element arbitrar din B este 5 sau 7, deci nici un element al mulţimii B nu este pătrat perfect. Rezultă $A \cap B = \emptyset$.

.... **2p**

b) $2012 = 5 \cdot 402 + 2 \in B$, $2012 = 7 \cdot 287 + 3 \in C$; deci $2012 \in B \cap C$.

.... **2p**

c) $D = \{\left(3^k\right)^2 \mid k \in \mathbb{N}^*,\ k \leq 2012\} \subset A$.

.... **1p**

d)

$$9^{2011} = \left(9^{670}\right)^3 + \left(2 \cdot 9^{670}\right)^3; \quad 9^{2012} = \left(9^{1005}\right)^2 + \left(8 \cdot 9^{1005}\right)^2 + \left(4 \cdot 9^{1005}\right)^2.$$

.... **2p**

V 3. Primul copil ia câte $1, 3, 5, \cdots$ bomboane, iar al doilea câte $2, 4, \cdots$ bomboane.

.... **2p**

Din faptul că $1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 100 < 101 < 121 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 + 21$, rezultă că primul copil ia ultima bomboană (dupa ce a extras anterior bomboane de 10 ori).

.... **3p**

În pachet au fost iniţial $1 + 2 + 3 + \cdots + 18 + 19 + 20 + 1 = 211$ bomboane.

.... **2p**

V 4. $2014 = 2 \cdot 53 \cdot 19$ - descompunere în factori primi.

.... **1p**

$\overline{ab} = 19 \;\Rightarrow\; b^2 + c^2 = 106 \;\Rightarrow\; c = 5$; deci $\overline{abc} = 195$;

.... **2p**

$\overline{ab} = 53 \;\Rightarrow\; b^2 + c^2 = 38 \;\Rightarrow\; c^2 = 29$; imposibil;

.... **2p**

$\overline{ab} = 38 \;\Rightarrow\; b^2 + c^2 = 53 \;\Rightarrow\; 64 + c^2 = 53$; imposibil.

.... **2p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.

Olimpiada de matematică, Faza locală, Braşov, 21 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a VI-a

VI 1.

$$\frac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}} = \frac{\overline{xy}}{\overline{yx}}.$$

.... **3p**

$$\frac{\overline{xy}}{\overline{yx}} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow 2x = y.$$

.... **2p**

Se obţin perechile: $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$ şi $(4, 8)$.

.... **2p**

VI 2. $4 \in A \cap B$.

.... **2p**

Determinăm $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, a. î. $2m = 3n - 2$; atunci $n = 2k$ şi $m = 3k - 1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $A \cap B = \{6k - 2 |\, k \in \mathbb{N}^*\}$.

.... **3p**

$6k - 2 \leq 2014 \Leftrightarrow k \leq 336$. Intersecţia are 336 elemente.

.... **2p**

VI 3. a) $BC = AC - AB = 2^{2012}$ cm$= AB$, deci B este mijlocul lui $[AC]$.

.... **2p**

b) $AM = 2^{2011}$ cm, $AN = 3 \cdot 2^{2012}$ cm, $MN = 5 \cdot 2^{2011}$ cm.

.... **3p**

Notăm $a = 2^{2012}$ (cm). Lungimile segmentelor determinate de punctele (echidistante) A, B, C, D, N aparţin mulţimii $\{a, 2a, 3a, 4a\}$. Putem forma un singur triunghi, cu lungimile laturilor $2a$, $3a$, $4a$.

.... **2p**

VI 4. Unghiurile nu pot fi adiacente suplementare.

.... **2p**

O latură a unui unghi este în interiorul celuilalt unghi.

.... **1p**

Notăm cu x şi y măsurile unghiurilor (în grade), $x < y$.
$x + y = 180, \ (y - x)/2 = 60$

.... **2p**

$x = 30, \ y = 150$. Deci unghiurile au măsurile de 30° şi 150°.

.... **2p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a VII-a

VII 1.

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1.$$

.... **4p**

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=3-\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)<3-1=2.$$

.... **3p**

VII 2. a) Pentru $a \neq 0$, $a, a^{-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \{-1, 1\}$.

.... **1p**

$\frac{5n-1}{4n+9}=1 \Leftrightarrow n=10.$

.... **2p**

$\frac{5n-1}{4n+9}=-1 \Leftrightarrow n=-\frac{8}{9} \notin \mathbb{Z}.$

.... **1p**

b) Fracţiile date sunt de tipul $\frac{2000+k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $14 \leq k \leq 999$; $\frac{2000+k}{k} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k|2000$.

.... **1p**

2000 are 12 divizori cuprinşi între 14 şi 999; fracţiile sunt distincte, deci există 12 numere naturale în şirul de fracţii date.

.... **2p**

VII 3. Numerele $11-x, 10-y, 9-z$ sunt pătrate perfecte pentru $x \in \{2,7\},\ y \in \{1,6,9\},\ z \in \{0,5,8,9\}$.

.... **3p**

Condiţia ca $x+y+z$ să fie pătrat perfect este îndeplinită pentru $\overline{xyz} \in \{268, 295, 718, 790, 799\}$.

.... **3p**

Suma numerelor este 2870, multiplu de 7.

.... **1p**

VII 4. Realizarea desenului

.... **1p**

Notăm $AT \cap BC = \{E\},\ AS \cap BC = \{F\}$.
Demonstrarea faptului că triunghiurile $\triangle ABF$ şi $\triangle ACE$ sunt isoscele.

.... **3p**

$AS = SF$ şi $AT = TE$.

.... **2p**

$S, T \in MN$

.... **1p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a VIII-a

VIII 1. a)

$$a+b=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{2n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{2n+1}-1.$$

.... **2p**

$(a+b+1)^2=2n+1\in\mathbb{N}$.

.... **1p**

b) $\sqrt{2014-\sqrt{8052}}=\sqrt{2013}-1$.

.... **1p**

$n=1006$.

.... **1p**

c) Presupunem prin absurd că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}=q,\ q\in\mathbb{Q}$.
$\sqrt{n+1}=q^2-n\in\mathbb{Q}$, deci $n+1=p^2,\ p\in\mathbb{N},\ p>1$.

.... **1p**

$n+\sqrt{n+1}=p^2-1+p$ şi $p^2<p^2+p-1<(p+1)^2\ \Rightarrow\ n+\sqrt{n+1}$ nu este pătrat perfect.
Contradicţie. Deci $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}\notin\mathbb{Q},\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

.... **1p**

VIII 2. $b+c>a$.

.... **1p**

$b+c>(a+b+c)/2$.

.... **2p**

$a/(b+c)<2a/(a+b+c)$.

.... **2p**

Finalizare.

.... **2p**

VIII 3. Dacă $n \in \{0, 1, 2\}$ atunci $2^n + 2013$ nu este pătrat perfect (verificare).

.... **3p**

Dacă $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, atunci $2^n + 2013 = 2^3(2^{n-3} + 251) + 5$ nu este pătrat perfect.

.... **3p**

Deci ecuaţia dată nu are soluţii naturale.

.... **1p**

VIII 4. Fie Q mijlocul lui BD.
Dreapta AF neinclusă în planul (DBQ); $AF \parallel PQ,\ PQ \subset (DBP)\ \Rightarrow\ AF \parallel (DBQ)$

.... **3p**

$m(\widehat{OG, FC}) = m(\widehat{GOP})$; $\mathrm{tg}(\widehat{GOP}) = \frac{GP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ m(\widehat{GOP}) = 30°$.

.... **2p**

.... **2p**

$BC \parallel EF\ \Rightarrow\ BC \parallel (AEF)$. Fie M mijlocul lui BC, $MH \perp AP$ $(H \in AP)$.
$MH \perp (AFE)$ (cf. reciprocei teoremei celor trei perpendiculare);
$d(BC, (AFE)) = d(M, (AFE)) = MH = \frac{AM \cdot MP}{AP} = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ (cm).

.... **2p**

Notă: Pentru orice rezolvare corectă se va acorda punctajul maxim.