

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a IX-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Dacă $a, b, c > 0$, demonstrați că $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$.

(Prelucrare, prof. Haiduc Sorina, Colegiul Național „Simion Bărnuțiu” Șimleu Silvaniei)

Soluție

Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \geq 1$ 2 puncte

Aplicăm inegalitatea lui Cauchy-Schwartz pentru trei numere reale:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \frac{a_3^2}{x_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, x_1, x_2, x_3 > 0 (*) \text{ 1 punct}$$

Fie $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$ și $x_1 = a^2 + 2ab, x_2 = b^2 + 2bc, x_3 = c^2 + 2ca$ (**)

Din $a, b, c > 0 \Rightarrow a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, x_1, x_2, x_3 > 0$ 1 punct

Din (*) și (**) rezultă

$$\frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+2ab)+(b^2+2bc)+(c^2+2ac)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$$

Rezultă că $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$ 3 puncte

PROBLEMA 2

Să se rezolve ecuația $\left[x + \frac{1}{2} \right] - \{x\} = [2(x+1)]$.

(Selectată de prof. Lucaci Simona, Colegiul Național „Silvania” Zalău)