

Olimpiada Națională de Matematică 2018 Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA A XI-A

Problema 1.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $x_1 = \frac{1}{2}$, iar $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați-i limita.

b) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

Soluție și barem

a) Se arată prin inducție că $x_n \in (0, 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. Apoi, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^4 + 3}{4} < 1$, așadar șirul este strict descrescător. Din teorema lui Weierstrass, $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, având limita $x \in \mathbb{R}$. (2p)

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $x^5 - x = 0$. Cum $x \in [0, 1]$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. (2p)

b) Observăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 + 3}{4} = \frac{3}{4}$. (1p)

Astfel, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. (2p)

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că matricea A este inversabilă.

b) Dacă B este inversa matricei A , demonstrați că

$$B^n = 2^n C_n^0 I_3 - 2^{n-1} C_n^1 A + 2^{n-2} C_n^2 A^2 - \dots + (-1)^n C_n^n A^n.$$

Soluție și barem

a) Cum $\det A = 1 \neq 0$, matricea A este inversabilă. (2p)

b) Observăm că $2^n C_n^0 I_3 - 2^{n-1} C_n^1 A + 2^{n-2} C_n^2 A^2 - \dots + (-1)^n C_n^n A^n = (2I_3 - A)^n$. (3p)

Dacă dovedim că $A^{-1} = 2I_3 - A$, soluția este completă. Această egalitate revine la $I_3 = A(2I_3 - A)$, i.e. $A^2 = 2A - I_3$, relație care se verifică prin calcul direct. (2p)

Problema 3.

Se consideră funcția $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), f(X) = X^3$. Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Soluție și barem

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Cum $A \neq O_3$ și $f(A) = f(O_3) (= O_3)$, funcția f nu este injectivă. (3p)

Pentru a arăta că funcția f nu este surjectivă, vom demonstra că ecuația $f(X) = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Presupunem, prin absurd, că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $X^3 = A$. În particular,

$$AX = XA (= X^4) \text{ și, de aici, obținem că matricea } X \text{ este de forma } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (2p)$$

Egalitatea $X^3 = A$ conduce la $a^3 = 0$ și $3a^2b = 1$, egalități care sunt contradictorii. Rezultă că presupunerea asumată este falsă. (2p)

Problema 4.

Fie $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ o funcție descrescătoare cu proprietatea că există un număr real strict pozitiv a astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+a)}{f(x)} = 1$. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+b)}{f(x)} = 1$, oricare ar fi numărul real b din intervalul $(a, +\infty)$.

Soluție și barem

Evident, există un număr natural $n \geq 2$ astfel încât $na > b$. Din $x+na > x+b > x, \forall x \geq 0$ obținem, folosind monotonia funcției f , că $f(x+na) \leq f(x+b) \leq f(x), \forall x \geq 0$. Cum $f(x) > 0$,

rezultă că $\frac{f(x+na)}{f(x)} \leq \frac{f(x+b)}{f(x)} \leq 1, \forall x \geq 0$ (*). (3p)

Însă $\frac{f(x+na)}{f(x)} = \frac{f(x+na)}{f(x+(n-1)a)} \cdot \frac{f(x+(n-1)a)}{f(x+(n-2)a)} \cdots \frac{f(x+a)}{f(x)}$ și, ținând cont de ipoteza

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+a)}{f(x)} = 1$, deducem că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+na)}{f(x)} = 1$. (3p)

Trecem la limită în relația (*) după $x \rightarrow \infty$ și obținem concluzia problemei. (1p)

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se vor puncta corespunzător.