

MATEMATIKA OLIMPIA

KÖRZETI SZAKASZ

2018. január 27.

XI. OSZTÁLY

- 1.) Adott az $A \in M_3(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$ mátrix.
- a) Határozd meg az A^n , $n \in \mathbf{N}^*$ mátrixot!
- b) Határozd meg az a valós szám azon értékeit, amelyekre a $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$,
 $n \in \mathbf{N}^*$ mátrixok invertálhatóak!
- 2.) Legyen A egy n -edrendű négyzetes mátrix, amely teljesíti az $A^3 = A + I_n$ összefüggést.
Igazold, hogy $\det A > 0$.
- 3.) Adott az $(a_n)_{n \geq 2}$ sorozat, ahol $a_n = \sum_{k=2}^n \log_3 \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Számítsd ki
annak a $(b_n)_{n \geq 2}$ sorozatnak a határértékét, amelynek általános tagja $b_n = n \cdot \ln a_n$.
- 4.) Az $(a_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozatról tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$.
- a) Ha az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat monoton, bizonyítsd be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- b) Érvényes marad az a) alpont következtetése, ha az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat nem monoton?
Válaszodat indokold!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.