



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală- Iași, 1 februarie 2018

Clasa a VIII-a

Barem de corectare si notare

1. Aflați numerele naturale x și y care verifică simultan relațiile următoare:

$$4x^2 + 5xy + 2y = 25 \text{ și } y^2 - xy + 4x = 10.$$

Barem de corectare:

Prin adunarea celor două relații se obține : $(2x + y)^2 + 2(2x + y) = 35$ (1).....2 pct

Relația (1) se descompune $(2x + y - 5)(2x + y + 7) = 0$ (2)2 pct

$2x + y + 7 = 0$ nu are soluții.1pct

$2x + y - 5 = 0$ are soluțiile $(x,y)=(0,5)$, $(x,y)=(1,3)$, $(x,y)=(2,1)$ 1 pct

Soluția care verifică ecuațiile inițiale : $(x,y)=(1,3)$ 1 pct

2. Fie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ un cub de latură a și punctele M și N mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[AA_1]$.

a) Calculați $C_1 S$, unde $\{S\} = MN \cap (A_1 B_1 C_1)$.

b) Determinați distanța de la punctul N la planul $(A_1 C_1 M)$.

Barem de corectare:

a) Construiește secțiunea (SPM) , unde P este mijlocul lui $B_1 C_1$ 1pct

$\triangle ANM \equiv \triangle A_1 NS$, deci $[A_1 S] = [AM] = [A_1 P]$ 1pct

Calculeaza $C_1 S = \frac{5a}{2}$ 1pct

b) Construiește secțiunea $(A_1 C_1 ME)$, unde $ME \parallel A_1 C_1$ 1pct

$AA_1 \parallel OO_1$, Q omologul lui N față de $(A_1 C_1 M)$ 1pct

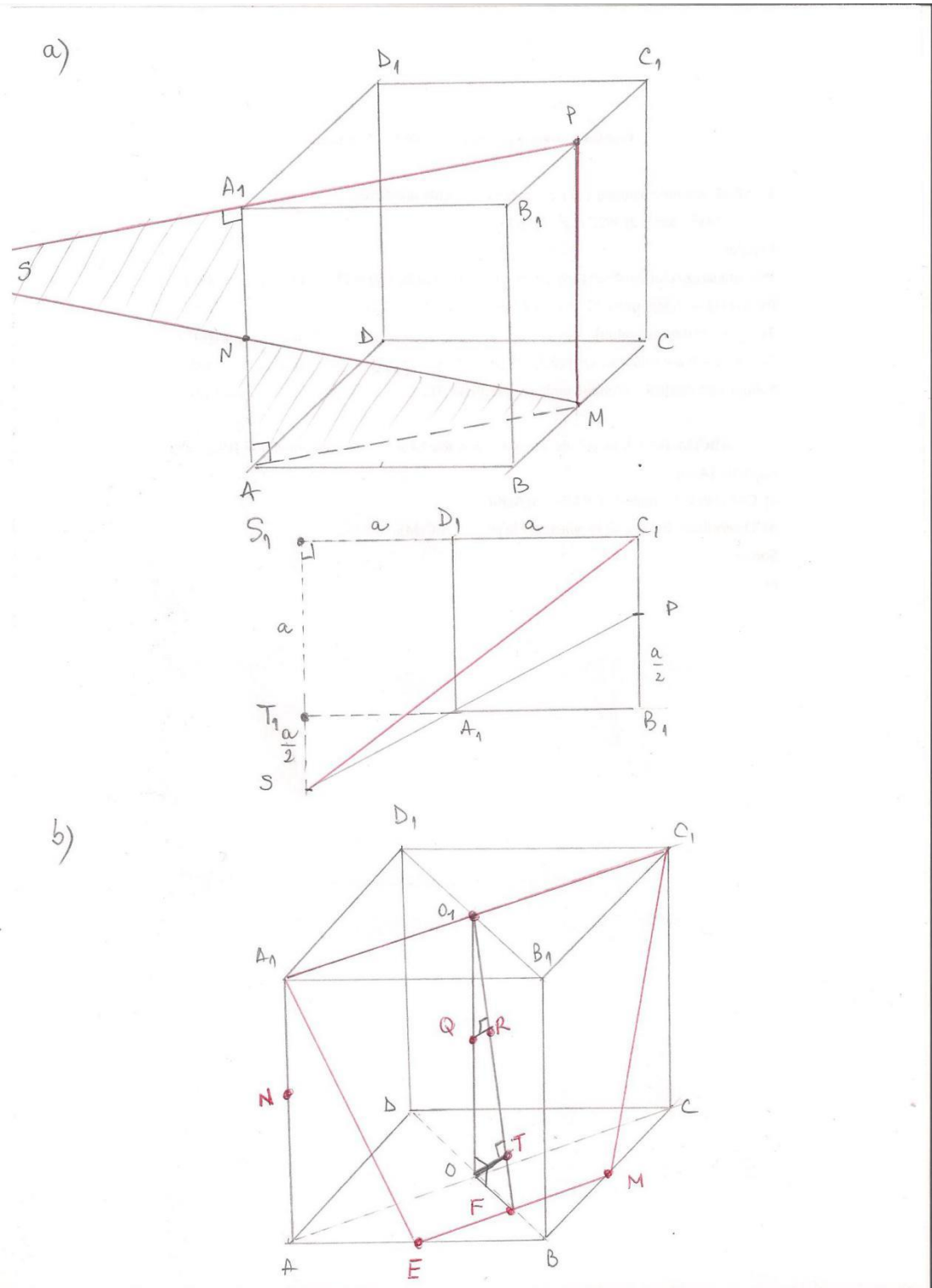


$$d(N, (A_1C_1M)) = d(Q, O_1F) = QR$$

.....1pct

$$\text{În } \triangle O_1OF: QR = \frac{1}{2} OT = \frac{1}{2} \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$$

.....1pct





3. a) Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \in \mathbf{Z}$$

b) Să se determine $x, y, z \in \mathbf{R}$, astfel încât:

$$\sqrt{x^2 - \sqrt{112}x + 37} + \sqrt{y^2 - \sqrt{180}y + 54} + \sqrt{z^2 - \sqrt{704}z + 185} \leq 9$$

Barem de corectare:

1.a) Raționalizează amplificând cu $\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$1p

Obține numărătorul egal cu $2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$1p

Finalizează și obține rezultatul $1 \in \mathbf{Z}$1p

b) Restrânge sub radicali și obține:

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{7})^2 + 3^2} + \sqrt{(y - 3\sqrt{5})^2 + 3^2} + \sqrt{(z - 4\sqrt{11})^2 + 3^2} \leq 9$$

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{7})^2 + 3^2} \geq \sqrt{9} = 3; \sqrt{(y - 3\sqrt{5})^2 + 3^2} \geq \sqrt{9} = 3; \sqrt{(z - 4\sqrt{11})^2 + 3^2} \geq \sqrt{9} = 3$$

Finalizează și obține $x = 2\sqrt{7}, y = 3\sqrt{5}$ și $z = 4\sqrt{11}$1p

4. Arătați că dacă o dreaptă d formează unghiuri congruente cu trei drepte a, b, c concurente coplanare, atunci dreapta este perpendiculară pe planul determinat de dreptele a, b, c .



Barem de corectare:

Dreapta d nu este paralelă cu planul α determinat de dreptele a, b, c concurente coplanare .

Construim $d' \parallel d$, $O \in d'$, $O = a \cap b \cap c$ **1p**

Construim $PP' \perp \alpha$ și $P'P_1 \perp a$, $P'P_2 \perp b$. Conform T3 $\perp$ rezulta $PP_1 \perp a$ și $PP_2 \perp b$ **1p**

$\triangle PP_1O' \equiv \triangle PP_2O'$ (IU), rezulta $[O'P_1] \equiv [O'P_2]$ **1p**

$\triangle P'P_1O' \equiv \triangle P'P_2O'$ (IC) rezulta $[P'P_1] \equiv [P'P_2]$, deci P' aparține bisectoarei unghiului $\angle (a, b)$ **1p**

Analog P' aparține bisectoarei unghiului $\angle (a, b)$ **1p**

Intersecția bisectoarelor este O' **1p**

Punctul $P' \equiv O'$ **1p**

