

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} |z - 1 - i| \leq \sqrt{2} \\ |z - 3 + i| = |z - 1 - i|, \text{ unde } z \in \mathbb{C}. \\ |z - 3 + i| \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Barem de corectare. Notăm cu $C((a, b), r)$ și $D((a, b), r)$, cercul, respectiv discul cu centrul în punctul de coordonate (a, b) și de rază r .

Avem $|z - 1 - i| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow M(z) \in D((1, 1), \sqrt{2}) \dots\dots\dots (1p)$

și $|z - 3 + i| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow M(z) \in C((3, -1), \sqrt{2}) \cup \text{Ext}(D((3, -1), \sqrt{2})) \dots\dots\dots (1p)$

Deoarece $|(3 - i) - (1 + i)| = 2\sqrt{2}$, rezultă că cercurile $C((1, 1), \sqrt{2})$ și $C((3, -1), \sqrt{2})$ sunt tangente exterior în punctul $A(2, 0), \dots\dots\dots (2p)$

iar din $|z - 3 + i| = |z - 1 - i|$, rezultă că punctul $M(z)$ se află pe mediatoarea segmentului determinat de centrele cercurilor $C((1, 1), \sqrt{2})$ și $C((3, -1), \sqrt{2}) \dots\dots\dots (2p)$

Așadar, soluția sistemului este $z = 2 \dots\dots\dots (1p)$

PROBLEMA 2. Considerăm mulțimea $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}^* \ (n \geq 2)$ cu proprietatea că $a_i \cdot a_j \in M$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Să se arate că $M = U_n$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;
- b) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$, unde $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, este funcția definită prin $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{[n \cdot x]}$.

Barem de corectare.

- a) Deoarece pentru orice $a \in M$, are loc $\{a \cdot a_1, a \cdot a_2, \dots, a \cdot a_n\} = M$, obținem că $a^n = 1$, de unde rezultă că $M = U_n \dots\dots\dots (2p)$

b) Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ avem: $[nx] = 0 \Rightarrow f(x) = n$, iar pentru $x = 1$, avem $f(1) = n \dots (2p)$

Deoarece $M = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$, unde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, pentru $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$

($k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) avem: $[nx] = k \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{ik} = \frac{1 - (\varepsilon^k)^n}{1 - \varepsilon^k} = 0 \dots (2p)$

Deci $f(x) = \begin{cases} n, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \{1\} \\ 0, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right) \end{cases}$, de unde rezultă că mulțimea $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$ are două elemente. (1p)

PROBLEMA 3. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

a) Să se arate că funcția f este bijectivă și să se determine inversa ei f^{-1} ;

b) Să se determine soluțiile întregi ale ecuației $2^x - 2^{-x} = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$.

Barem de corectare.

a) Deoarece pentru orice $y \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = y$ are soluția unică $x = \log_2 \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ (2p)

rezultă că funcția f este inversabilă, deci bijectivă. Inversa ei este funcția $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ (1p)

b) Deoarece graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare, ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$ este echivalentă cu $f(x) = x$ (2p)

Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, avem $2^n \geq n + 1$, adică $\begin{cases} f(n) > n \\ f(-n) = -f(n) < -n \end{cases}$.

Cum $f(0) = 0$, rezultă că $x = 0$ este singura soluție din $\mathbb{Z}$ a ecuației. (2p)

PROBLEMA 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, unde $a, b > 1$.

Barem de corectare.

Dacă $a = b$, atunci ecuația devine $2a^{x^2-2x} = 2a^{-1}$, cu soluția unică $x = 1$ (3p)

Dacă $a \neq b$, atunci $2(ab)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} = \frac{a^{x^2+2x} + b^{x^2+2x}}{(ab)^{2x}} > \frac{2\sqrt{(ab)^{x^2+2x}}}{(ab)^{2x}} = 2(ab)^{\frac{x^2-2x}{2}}$ (2p)

de unde, cum $ab > 1$, obținem că $-\frac{1}{2} > \frac{x^2 - 2x}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 0$, ceea ce este imposibil. (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.