

Soluții și bareme orientative

Clasa a IX-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Presupunem că A conține k^2 și $(k+1)^2$. Rezultă $\sum_{a \in A} \frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{2k+2}{k+1} = 2$, ceea ce este fals.

(3p)

b) Pentru $1 \leq k \leq 1008 \Rightarrow 0 < \frac{2}{2017} \leq k \cdot \frac{2}{2017} \leq \frac{2016}{2017} < 1 \Rightarrow \left\{ k \cdot \frac{2}{2017} \right\} = k \cdot \frac{2}{2017}$. (1p)

Pentru $1009 \leq k \leq 2016 \Rightarrow 1 < \frac{2018}{2017} \leq k \cdot \frac{2}{2017} \leq \frac{4032}{2017} < 2 \Rightarrow \left\{ k \cdot \frac{2}{2017} \right\} = \frac{2k-2017}{2017}$. (1p)

Avem: $\left\{ \frac{2}{2017} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2}{2017} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2}{2017} \right\} + \dots + \left\{ 2016 \cdot \frac{2}{2017} \right\} =$
 $\frac{1}{2017} (2 + 4 + 6 + \dots + 2016 + 1 + 3 + 5 + \dots + 2015) = 1008$. (2p)

2. $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n - 2, \forall n \geq 1$ (2p)

Notăm $x_n = a_n - b_n$ și avem $x_{n+1} = x_n - 2, \forall n \geq 1$ (1p)

Adunând membru cu membru relațiile $x_2 = x_1 - 2, x_3 = x_2 - 2, \dots$,

$x_{2017} = x_{2016} - 2$ obținem $x_{2017} = x_1 - 4032$. (2p)

$x_1 = 1 \Rightarrow x_{2017} = -4031 \Rightarrow b_{2017} - a_{2017} = 4031$. (2p)

3. Notăm cu $\vec{x}$ vectorul de poziție al unui punct X . Atunci:

$$\begin{aligned} \vec{m} - \vec{a} &= \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \\ \vec{n} &= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}, \vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \text{ și } \vec{q} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{n} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}, \\ \vec{r} &= \frac{1}{4}\vec{m} + \frac{3}{4}\vec{p} = \frac{11}{24}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}, \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{11}{24}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}. \end{aligned} \quad (2p)$$

Cum G, G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și QRS , avem $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ și $\vec{g}' = \frac{1}{3}(\vec{q} + \vec{r} + \vec{s}) = \frac{1}{3} \left(\frac{19}{24}\vec{a} + \frac{19}{24}\vec{b} + \frac{34}{24}\vec{c} \right)$. (2p)

Atunci:
 $\overrightarrow{GG'} = \vec{g}' - \vec{g} = \frac{1}{3} \left(-\frac{5}{24}\vec{a} - \frac{5}{24}\vec{b} + \frac{10}{24}\vec{c} \right)$, $\overrightarrow{G'Q} = \vec{q} - \vec{g}' = \frac{1}{3} \left(-\frac{7}{24}\vec{a} - \frac{7}{24}\vec{b} + \frac{14}{24}\vec{c} \right)$, deci
 $\overrightarrow{GG'} = \frac{5}{7}\overrightarrow{G'Q}$. Rezultă coliniaritatea punctelor Q, G, G' și $\frac{GG'}{G'Q} = \frac{5}{7}$. (3p)

4. Notăm: $\frac{A_1C}{A_1B} = k \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}}{1+k}$. (1p)

În triunghiul AA_1C și transversala $B - M - B_1$ rezultă $\frac{MA}{MA_1} = k(k+1)$, deci

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k^2+k+1}(\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}). \quad (2p)$$

În triunghiul ABA_1 și transversala $C_1 - P - C$ rezultă $\frac{PA}{PA_1} = \frac{k+1}{k^2}$, de unde

$$\overrightarrow{PA_1} = \frac{k^2}{(k+1)(k^2+k+1)}(\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}).$$

Prin urmare $\overrightarrow{PA_1} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AM}$ și analog se determină $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$. (2p)

Rezultă $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{NC_1} = \vec{0}$, deci cu cele două mulțimi de segmente se pot forma două triunghiuri asemenea de raport $\frac{k}{k+1}$. **(2p)**