

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţi că

- (a) Dacă $a + d$ este un număr par, atunci $x_n + t_n$ este un număr par, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Dacă $a + d$ şi $b + c$ sunt numere impare, atunci $x_n + t_n$ este un număr impar, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

Romeo Ilie

2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale şi $y_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Demonstraţi că dacă şirul $(y_n)_{n \geq 2}$ are limită, atunci şi şirul $\left(\frac{x_n}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ are limită.

Reciproca este adevărată? Justificaţi răspunsul.

Romeo Ilie

3. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2024}}$, cu $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ -1, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$.

- (a) Calculaţi $\det(A)$.
(b) O *mutare* într-o matrice constă în schimbarea semnelor elementelor unei linii sau coloane. Decideţi dacă este posibil ca, pornind de la matricea A , să obţinem o matrice cu două linii sau două coloane identice, după 2024 de *mutări*. Justificaţi răspunsul.

Gazeta Matematică, enunţ modificat

4. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
(b) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.