

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN V A S L U I

TELEFON: 0235/311928

FAX: 0235/311715

e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro

website : <http://isj.vs.edu.ro>

Nr..... din.....



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a XII-a

1. Să se arate că $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{2} (1 + \sin x \cos^2 x) dx$.

2. a) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2014 \text{ de } f}(x) = 2014^{-x}$, nu admite primitive.

b) Fie șirul cu termenul general $I_n = \int_0^{\pi/4} e^{nx} (tg^{n-1} x + tg^n x + tg^{n+1} x) dx, n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n^2]{I_n} - 1)$.

3. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește operația $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

a) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este element neutru.

b) Să se arate că $(G, *)$ este grup.

c) Să se arate că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

(Gazeta Matematica, nr 12/2013)

4. Fie A un inel cu proprietatea că ecuația $x^2 = 0$ are în A numai soluția $x = 0$. Arătați că:

a) Dacă $ab = 0$, unde $a, b \in A$, atunci $ba = 0$ și $axb = 0$ pentru orice $x \in A$.

b) Dacă $abc = 0$, unde $a, b, c \in A$, atunci $bca = cab = 0$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte