OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

CLASA A IX-A

Programa TC+CD (4 ore)

1.) **a)** Să se demonstreze inegalitatea $(1-a)(1-b)(1-c)+abc \le \frac{1}{3}$ dacă $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi $a+b+c=1$

b) Să se determine mulţimea $M = \left\{ x \in Z \middle| \sqrt{x^2+2013} \in Z \right\}$.

2.) Să se rezolve ecuaţia [x+{x}] = [x+[x]], x∈ ℝ, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respective partea fracţionară al numărului real *x*.

3.) Considerăm vectorii $\vec{w}_n = a_n\vec{i} + a`_n\vec{j}, n \in N^*$.

a) Dacă $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(a`_n)_{n\ge1}$ sunt progresii aritmetice neconstante cu raţiile *r* respectiv *r*`,

în ce condiţie există printre vectorii $\vec{w}_n, n \in N^*$ vectori coliniari diferiţi? În acest caz care sunt vectorii coliniari?

b) Aceleaşi întrebări dacă $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(a`_n)_{n\ge1}$ sunt progresii geometrice cu raţiile *q* respectiv *q*`.

4.) Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se iau punctele *M* şi *N* astfel încât $\frac{MA}{MB} = k,\ \frac{NA}{NC} = l,\ k,l \in Q_+^*,\ k < l$. Fie $\{P\} = MN \cap BC$. Determinaţi valoarea lui *l* în funcţie de *k* pentru care triunghiurile *AMN* şi *CNP* au ariile egale.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore