

BAREM DE CORECTARE
CLASA a V-a

Subiectul I

Fie numerele a , b și c . Împărțind pe a la b obținem câtul 6 și restul 3, iar pe b la c obținem câtul 4 și restul 5.

a) Arătați că $a \geq 177$.

b) Determinați numerele a , b și c știind că $a + b + c = 241$.

Soluție

a) Din TÎR avem ca $a = 6 \cdot b + 3$ și $b = 4 \cdot c + 5$,2p

Înlocuind $a = 24 \cdot c + 33 \geq 24 \cdot 6 + 33 = 144 + 33 = 177$2p

b) $a + b + c = 24 \cdot c + 33 + 4 \cdot c + 5 + c = 29 \cdot c + 38$2p

Rezolvând ecuația $29 \cdot c + 38 = 241$ se obține $c = 7$, $b = 33$ și $a = 201$1p

Subiectul II

Se împarte la 11 numărul $a = 7^{n+1} + 4 \cdot 7^n + 15$.

a) Aflați câtul și restul împărțirii.

b) Determinați ultimele două cifre ale câtului, știind că n este multiplu de 4.

Soluție

a) $a = 7^n \cdot (7 + 4) + 15 = 7^n \cdot 11 + 11 + 4 = 11 \cdot (7^n + 1) + 4$

Deoarece $4 < 11$, avem câtul împărțirii $7^n + 1$ și restul este 4.....3p

b) Fie $n = 4k$. Atunci $7^n + 1 = (7^4)^k + 1 = 2401^k + 1 = (M_{100} + 1)^k + 1 = M_{100} + 1 + 1$ 3p

Ultimele două cifre sunt 0 și 2.....1p

Subiectul III

Cei zece băieți din clasa a V-a au fiecare câte un număr de bile albe egal cu suma a trei puteri consecutive ale lui 2, de forma $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$. Primul băiat spune : " numărul meu de bile se obține pentru $n=0$ ", al doilea spune : " numărul meu de bile se obține pentru $n=1$ ", ..., al zecelea spune : " numărul meu de bile se obține pentru $n=9$ ". Cele zece fete din clasă au fiecare câte un număr de bile roșii egal cu suma a trei puteri consecutive ale lui 3, de forma $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$. Prima fată spune : " numărul meu de bile se obține pentru $n=0$ ", a doua spune : " numărul meu de bile se obține pentru $n=1$ ", ..., a zecea fată spune : " numărul meu de bile se obține pentru $n=9$ ".

a) Câte bile albe are primul băiat ? Câte bile roșii are a doua fată ?

b) Arătați că fiecare băiat are un număr de bile care este multiplu de 7. Arătați că fiecare fată are un număr de bile care este multiplu de 13.

BAREM DE CORECTARE

CLASA a V-a

c) Există în clasă o pereche formată dintr-o fată și un băiat care au împreună un număr par de bile? Justificați răspunsul. Câte astfel de perechi se pot forma ?

Soluție:

a) Primul băiat are $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1+2+4=7$ bile albe1p

A doua fată are $3^1 + 3^2 + 3^3 = 3+9+27 = 39$ bile roșii1p

b) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n \cdot 7$ 1p

$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n \cdot 13$ 1p

c) Fiecare băiat, cu excepția primului, are un nr. par de bile .

Fiecare fată are un nr. impar de bile1p

Pentru ca suma să fie un nr. par este necesar ca băiatul să aibă un nr. impar de bile1p

Deci perechea formată cu primul băiat și oricare dintre fete are un nr. par de bile fapt care ne duce la concluzia că sunt 10 astfel de perechi1p

Subiectul IV

Se consideră mulțimile:

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 2^{2016} \leq x < 2^{3024} \}$ și $B = \{ y \in \mathbb{N} \mid 3^{2016} \leq x < 3^{3024} \}$.

Calculați $A \cap B$.

Soluție:

a) Arată că: $2^{3024} = 8^{1008}$, $3^{2016} = 9^{1008}$ 2p

$8^{1008} < 9^{1008} \Rightarrow 2^{3024} < 3^{2016}$ 1p

$x \in A, y \in B$ avem $x < 2^{3024} < 3^{2016} \leq y \Rightarrow x \neq y$ 1p

Concluzia: $A \cap B = \emptyset$, 1p

b) $\text{card}A = 2^{3024} - 2^{2016}$ 1p

$\text{card}B = 3^{3024} - 3^{2016}$ 1p