

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A- XII-A

15 februarie 2015

1. Să se calculeze:

a. $\int \frac{e^{2x} + x^3 + 5x^2 - 1}{e^{2x} + 3x^3 + 6x^2 - 12x + 9} dx, x \in (0, \infty)$. (supliment GM);

b. $\int \frac{1}{x^4 + x^{10}} dx, x \in (0, \infty)$. (supliment GM).

2. Fie o funcție bijectivă, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $q \in \mathbf{R}$ cu $f(q) = 2$. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ ” prin: $a \circ b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - q) \forall a, b \in \mathbf{R}$.

a. Determinați elementul neutru al legii de compoziție și simetricul lui $a \in \mathbf{R}$ în raport cu legea „ $\circ$ ”;

b. Pentru $f(x) = x^3$, rezolvați ecuația: $x^2 \circ x = (6 - q)^3$. (supliment GM).

3. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^n x} dx, n \geq 1$.

a. Calculați I_1 ;

b. Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați limita lui. (Jenică Crînganu).

4. Să se determine morfismele de grupuri de la $(\mathbf{Z}_p, +)$ la $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$, unde $p \in \mathbf{N}$ este un număr prim. (Constantin Niță).

Nota :Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele se noteaza cu 7 puncte