

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ**

16 februarie 2013

Clasa a VI-a

Barem de corectare

Subiectul I (7p)

a) Arătați că $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2013} < \frac{1}{2}$;

b) Calculați produsul numerelor A și B unde:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2012}\right)$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013}\right).$$

Soluție:

a) $2S = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{2011 \cdot 2013}$ 1p

$$2S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013}$$
2p

Finalizare $S = \frac{1006}{2013} < \frac{1}{2}$ 1p

b) $A \cdot B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013}\right)$ 1p

$$A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2012}{2013}$$
1p

Finalizare $A \cdot B = \frac{1}{2013}$ 1p

Subiectul II (7p)

Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D, E, F , în această ordine astfel încât ,
 $AB = BC$, $BD = DE$, $CE = EF$ și $AF = 48cm$.

a) Calculați lungimea segmentului $[DE]$.

b) Dacă în plus, mijlocul lui $[DE]$ coincide cu mijlocul lui $[AF]$, calculați lungimile segmentelor $[AB]$ și $[EF]$.

Soluție:

- a) Dacă $AB = x$ și $CD = y$ atunci $DE = x + y$ 1p
 $AF = 48 \Rightarrow 4x + 4y = 48$ 2p
 Finalizare: $DE = 12\text{cm}$ 1p
- b) M mijlocul lui $[DE]$ și $[AF]$ obținem $AD = EF = 18$ 1p
 $AD = EF \Rightarrow 2x + y = x + 2y \Rightarrow x = y$ 1p
 Finalizare $AB = x = 6\text{cm}$ 1p

Subiectul III (7p)

Aflați numerele naturale a și b știind că $[a, b]$ este de 15 ori mai mare decât (a, b) și $5a + 3b = 150$.

Am notat cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun și cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Soluție:

- $(a, b) = d$ atunci $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$, $x, y \in \mathbb{N}$ cu $(x, y) = 1$ 1p
 Din $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$ și $[a, b] = 15 \cdot d$ obținem $d \cdot x \cdot d \cdot y = 15 \cdot d^2$ 2p
 $x \cdot y = 15 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 5), (15, 1), (3, 5), (5, 3)\}$ 1p
 Prin înlocuire în relația $5a + 3b = 150$ obținem $d \in \{3, 5\}$ 2p
 Finalizare $(a, b) \in \{(3, 45), (15, 25)\}$ 1p

Subiectul IV (7p)

Se consideră un triunghi isoscel $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\angle A) > 90^\circ$. Notăm cu M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și respectiv $[AC]$.

- a) Arătați că $[CM] \equiv [BN]$
- b) Perpendiculara în M pe dreapta CM intersectează dreapta AC în E iar perpendiculara în N pe BN intersectează dreapta AB în F . Demonstrați că triunghiul $\triangle AFE$ este un triunghi isoscel.

Soluție:

- a) $\triangle AMC \equiv \triangle ANB$ 2p
 Finalizare: $[CM] \equiv [BN]$ 1p
- b) $\triangle AMC \equiv \triangle ANB \Rightarrow \triangle MCA \equiv \triangle NBA$ 1p
 $\triangle EMC \equiv \triangle FNB \Rightarrow [BF] \equiv [CE]$ 2p
 Finalizare: $[AF] \equiv [AE] \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel1p

Notă: Orice altă soluție corectă va fi notată corespunzător.