



---

Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a IX-a

1. Determinați numerele reale  $x$ , pentru care are loc egalitatea  $\{x\} + \{2x\} = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ , unde  $\{t\}$  reprezintă partea fracționară iar  $[t]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $t$ .

2. a) Arătați că  $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$  oricare ar fi  $x, y \in (0, +\infty)$ .

b) Dacă  $a, b, c, d \in (0, +\infty)$ , astfel încât  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$ , arătați că:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

3. Determinați numerele reale strict pozitive  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , știind că

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Considerăm  $\triangle ABC$  și  $D, E, F$  intersecțiile medianelor din  $A, B$ , respectiv  $C$  cu cercul circumscris triunghiului. Arătați că dacă  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ , atunci :

a) triunghiurile  $ABC$  și  $DEF$  au același centru de greutate;

b) triunghiul  $ABC$  este echilateral.

*Timp de lucru: 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*