Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014, Clasa a XII a

1. Pe mulţimea $M=\left(0,\infty\right)$ se defineşte legea de compoziţie "$*$" care satisface următoarele proprietăţi:

a) $\left(x*y\right)\cdot\left(x*z\right)=x*\left(y+z\right),\forall x,y,z\in M$;

b) $x*1=x,\forall x\in M$.

Să se calculeze $4*\frac{1}{4}$ şi $\sqrt{2014}*2014$.

Lucian Dragomir , RMT 1/2006

2. Fie $\left(G,\cdot\right)$ un grup finit de ordin n şi $f:G\to G$ un morfism cu proprietăţile:

a) $f\circ f=\mathbf{1}_G$; b) $f(x)=x\Rightarrow x=e$.

Să se arate că: 1) $\left\{f(x)\cdot x^{-1}/x\in G\right\}=G$;

2) G este abelian;

3) n este impar.

Dorel Miheţ

3. a) Dacă $F:\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei $f:\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

pentru care $F(0)=0$, calculaţi $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Determinaţi funcţiile derivabile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit o primitivă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $G(x)=\frac{x\cdot g(x)}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

* * *

4. a) Demonstraţi că $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\ \forall x>0$.

b) Calculaţi $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

GM 2007

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.