S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a XI-a
Barem de evaluare

Problema1. Fie $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât: $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$

Aflaţi x şi y .

Gazeta Matematică

SOLUŢIE

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ …….**1punct**, $\det(AB) = \det(BA) \Rightarrow xy = 200$ ……**1punct**

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Din $A \cdot B \Rightarrow \begin{cases} ap + br = 10 \\ cq + ds = 20 \end{cases}$, respectiv din $BA \Rightarrow \begin{cases} ap + cq = x \\ br + ds = y \end{cases}$ ……**1punct**

de unde $x - 10 = cq - br$ şi $20 - y = cq - br$ deci $x - 10 = 20 - y \Rightarrow x + y = 30$ ……..**1punct**

$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 200 \end{cases}$ $1 punct$ **1 punct**

$\Rightarrow x = 10, y = 20,\ sau \quad x = 20, y = 10$

Din oficiu 1punct

Probleme2. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A + B = A \cdot B$ şi $\det(A + B) > 0$.

Să se arate că: a) $A^{-1} + B^{-1} = I_n$; b) $\det(A^2 + B^2) \geq 0$; c) $\det(A \cdot B - 2I_n) \geq 0$.

SOLUŢIE

a) $A + B = A \cdot B \Rightarrow \det(A + B) = \det(A \cdot B) > 0$. Deci $\det A \neq 0$ si $\det B \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}, B^{-1}$ ……**1punct**

$A^{-1} \cdot | A + B = A \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B$

$A^{-1}\cdot A+A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot A\cdot B\Big|\cdot B^{-1}\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot B^{-1}+A^{-1}\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot A\cdot B\cdot B^{-1}$……..**1punct**

de unde folosind asociativitatea înmultiri matricelor obtinem $A^{-1}+B^{-1}=I_n$……..**1punct**

b) Demonstrăm că din $A+B=A\cdot B$ rezultă că $A\cdot B=B\cdot A$

$A+B=A\cdot B\Rightarrow A\cdot B-A-B=O_n\Rightarrow A\cdot B-A-B+I_n=I_n\Rightarrow A\cdot(B-I_n)-(B-I_n)=I_n$ de unde $(A-I_n)\cdot(B-I_n)=I_n\Rightarrow \det(A-I_n)\cdot\det(B-I_n)=1$, deci $\det(A-I_n)\neq 0\Rightarrow \exists(A-I_n)^{-1}$.

Înmultim egalitatea $(A-I_n)\cdot(B-I_n)=I_n$ cu $(A-I_n)^{-1}$din stânga si cu $(A-I_n)$din dreapta.

$(A-I_n)^{-1}\cdot\big|(A-I_n)\cdot(B-I_n)=I_n\big|(A-I_n)\Rightarrow(B-I_n)(A-I_n)=I_n$ de unde $B\cdot A-B-A+I_n=I_n$ dar

$A\cdot B-A-B+I_n=I_n$ deci $A\cdot B=B\cdot A$……..**1punct**

Dacă $\overline{X}\in M_n(\mathbf{C})$ **este conjugata matricei** $X\in M_n(\mathbf{C})$**, atunci se stie că** $\det\overline{X}=\overline{\det X}$ **si** $\det X\cdot\det\overline{X}\geq 0$**.**

Fie $X=A+iB$ și $\overline{X}=A-iB$ de unde având în vedere că $A\cdot B=B\cdot A$ rezultă că $\det[(A+iB)\cdot(A-iB)]=\det(A^2+B^2)\geq 0$…………..**1punct**

c) $(A+B)^2=(A\cdot B)^2\Rightarrow A^2+B^2+2AB=(A\cdot B)^2$, de unde $A^2+B^2=AB(AB-2I_n)$

De unde $\det(A^2+B^2)=\det(AB)\cdot\det(AB-2I_n)\geq 0$, dar $\det(A\cdot B)>0$ deci obtinem $\det(A\cdot B-2I_n)\geq 0$………………**1punct**

Din oficiu 1punct

Probleme3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2x_n+2}$ $\forall n\in\mathbf{N}^*$, unde $x_1=a\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita şirului.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-n\right)$.

SOLUŢIE

Din $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2x_n+2}\Rightarrow x_{n+1}=\sqrt{(x_n-1)^2+1}\Rightarrow x_n\geq 1,\forall n\geq 2$……….**1punct**

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{2(1-x_n)}{\sqrt{x_n^2-2x_n+2}+x_n}\leq 0,\forall n\geq 1$…………**1punct**

Deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ descrescător şi $1 \leq x_n \leq x_2, \forall n \geq 2 \Rightarrow$ şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent….1punct

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, din relaţia de recurenţă rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$…………..**1punct**

b) Din $x_{k+1}^2 - x_k^2 = -2(x_k - 1), \forall k \geq 1$, dând lui *k* valori de la 1 la *n* şi adunând relaţiile obţinute rezultă punct $x_{n+1}^2 - x_1^2 = -2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n\right)$………………………………………..**1punct**

De unde trecâd la limită se obţine punct $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n\right) = \frac{a^2 - 1}{2}$ …………………**1punct**

Din oficiu 1punct

Problema 4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $x_0 > 0,\ x_n = x_{n-1} \cdot (2 - a x_{n-1}), \forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $a > 0$ un număr fixat. Dacă $x_1 > 0$, să se calculeze limita şirului.

SOLUŢIE

Din relaţia $x_n = x_{n-1}(2 - a x_{n-1})$, obţinem $1 - a x_n = (1 - a x_{n-1})^2, \forall n \in \mathbf{N}^*$..**2puncte**

Folosind metoda inducţiei matematice se poate demonstra că $1 - a x_n = (1 - a x_0)^{2^n}, \forall n \in \mathbf{N}$..**2puncte**

Deoarece $x_1 = x_0(2 - a x_0) > 0$, $x_0 > 0$, rezultă că $2 - a x_0 > 0 \Rightarrow 1 - a x_0 > -1;$ dar $1 - a x_0 < 1,$ deci $|1 - a x_0| < 1.$ Deci $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - a x_0)^{2^n} = 0,$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - a x_n) = 0,$ de unde $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{a}.$ …………………………………………………………**2puncte**

Din oficiu 1punct