OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 22 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XII-a

1. a) **(3p)** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $(G, \cdot)$ un grup cu $3n+1$ elemente. Să se demonstreze că pentru orice $a \in G$, există un unic $x \in G$ astfel încât $x^3 = a^2$.

b) **(4p)** Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și $(G, \cdot)$ un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Știind că funcția $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ este endomorfism al grupului, să se demonstreze că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Gazeta Matematică

Soluţie.

a) $ord(G) = 3n+1 \Rightarrow a^{3n+1} = e \Rightarrow a \cdot a^{3n} = e \Rightarrow a = \left(a^{3n}\right)^{-1} \Rightarrow a^2 = \left(a^{-1}\right)^{6n}$.

Pentu $x = \left(a^{-1}\right)^{2n}$ avem $x^3 = a^2$.

Dacă $x^3 = a^2$ și $y^3 = a^2$, atunci $x^{3n} = y^{3n} \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$

b) $ord(G) = n^2 - n - 1 \Rightarrow x^{n^2-n-1} = e \Rightarrow x^{n^2-n} = x$, $\forall x \in G$

f endomorfism de grupuri $\Rightarrow (xy)^n = x^n y^n$, $\forall x, y \in G$. Simplificând la stânga prin x și la dreapta prin y obținem $(yx)^{n-1} = x^{n-1}y^{n-1} \Rightarrow \left((yx)^{n-1}\right)^n = \left(x^{n-1}y^{n-1}\right)^n \Rightarrow (yx)^{n^2-n} = x^{n^2-n}y^{n^2-n} \Rightarrow yx = xy$

Barem.

a) Existența	2 p
Unicitatea	1 p
b) $x^{n^2-n} = x$, $\forall x \in G$	1 p
f endomorfism de grupuri $\Rightarrow (xy)^n = x^n y^n$, $\forall x, y \in G$	1 p
Finalizare	2 p

2. Fie $x \in \mathbb{Z}_{2014}$ astfel încât $x^{2014} = \hat{1}$. Arătați că $x^2 = \hat{1}$.

***

Soluţie.

$x^{2014} = \hat{1} \Rightarrow x \in U(\mathbb{Z}_{2014})$, adică x este element inversabil în $\mathbb{Z}_{2014}$. $(U(\mathbb{Z}_{2014}), \cdot)$ este grup cu $\varphi(2014)$ elemente. Cum $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ rezultă că $\varphi(2014) = 2014\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\left(1-\frac{1}{53}\right) = 936$ și atunci $x^{936} = \hat{1}$. Dar $(2014, 936) = 2$, deci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $936p + 2014q = 2$ și atunci $x^2 = x^{936p+2014q} = \left(x^{936}\right)^p \cdot \left(x^{2014}\right)^q = \hat{1}$.

Barem.

x este element inversabil în $\mathbb{Z}_{2014}$	1 p
$(U(\mathbb{Z}_{2014}), \cdot)$ este grup cu $\varphi(2014) = 936$ elemente	2 p
$x^{936} = \hat{1}$	1 p
Finalizare	3 p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că pentru orice $\lambda>0$, există $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $c_1\neq c_2$ astfel încât $f(c_1)+\lambda f(c_2)=0$.

Ion Bursuc

Soluție.

Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă neinjectivă a lui *f*. Atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ astfel încât $F(a)=F(b)$.

Fie $c\in(a,b)$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalele $[a,c]$ și $[c,b]$ deducem că există $c_1\in(a,c)$, $c_2\in(c,b)$ astfel încât $F(c)-F(a)=(c-a)f(c_1)$ şi $F(b)-F(c)=(b-c)f(c_2)$. Adunând aceste două relații obținem că $(c-a)f(c_1)+(b-c)f(c_2)=0$ (1).

Fie $\lambda>0$. Vom determina c astfel încât $b-c=\lambda(c-a)\Leftrightarrow c=\dfrac{\lambda a+b}{1+\lambda}\in(a,b)$

Relaţia (1) devine: $(c-a)f(c_1)+\lambda(c-a)f(c_2)=0\Leftrightarrow f(c_1)+\lambda f(c_2)=0$.

Barem.

F neinjectivă $\Leftrightarrow$ există $a,b\in\mathbb{R},a<b$ astfel încât $F(a)=F(b)$	1 p
Obține relația (1)	3 p
Determină $c=\dfrac{\lambda a+b}{1+\lambda}\in(a,b)$	2 p
Finalizare	1 p

4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă cu $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Dacă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata integrabilă, demonstraţi că are loc inegalitatea:

$$2\int_0^1 f(x)g(x)dx\le\int_0^1|f(x)|dx\cdot\int_0^1|g'(x)|dx.$$

Ion Bursuc

Soluție.

$\forall x\in(0,1)$ avem $\int_0^x g'(t)dt=g(t)\Big|_0^x=g(x)-g(0)$

Deoarece $\int_0^1 f(x)dx=0,$ deducem că $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 f(x)\left[g(x)-g(0)\right]dx=$

$$=\int_0^1\left(f(x)\cdot\left(\int_0^x g'(t)dt\right)\right)dx\le\int_0^1\left(|f(x)|\cdot\left|\int_0^x g'(t)\,|dt|\right|\right)dx\le\int_0^1\left(|f(x)|\cdot\left(\int_0^x|g'(t)|dt\right)\right)dx \qquad (1)$$

Similar, $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 f(x)\left[g(x)-g(1)\right]dx=$

$$=\int_0^1\left(f(x)\cdot\left(\int_1^x g'(t)dt\right)\right)dx\le\int_0^1\left(|f(x)|\cdot\left|-\int_x^1 g'(t)\,|dt|\right|\right)dx\le\int_0^1\left(|f(x)|\cdot\left(\int_x^1|g'(t)|dt\right)\right)dx \qquad (2)$$

Adunând inegalitățile (1) şi (2) obţinem inegalitatea din enunţ.

Barem.

Demonstrează (1)	3 p
Demonstrează (2)	3 p
Finalizare	1 p

Notă:
Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.