



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iași
14.02.2014

CLASA a X-a

BAREM

Problema 1.

a) $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = |z + i|$ 1p

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$, unde $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ 2p

$\Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ 1p

b) $x_1 = f(2) = \frac{3-4i}{5}$, $x_2 = -3i$ 1p

$x_{n+3} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$x_0 + x_1 + \dots + x_{2014} = 672(x_0 + x_1) + 671x_2$ 1p

Problema 2.

$[x] > 0 \Rightarrow x \geq 1$; analog celelalte 1p

$\lg[x] = -\frac{\{\lg y\}}{2014} \in \left(-\frac{1}{2014}, 0\right]$ 1p

$\Rightarrow 10^{-\frac{1}{2014}} < [x] \leq 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \{\lg y\} = 0 \Rightarrow \lg y \in \mathbb{Z}$; analog celelalte 3p

Deci $x, y, z \in [1, 2)$ și pentru $\lg x = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 10^n \in [1, 2) \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = 1$

Analog $y = 1, z = 1$ 2p

Problema 3.

Din inegalitatea mediilor, $4^{\frac{m}{n+p}} + 4^{\frac{n}{m+p}} + 4^{\frac{p}{n+m}} \geq 3\sqrt[3]{4^{\frac{m}{n+p} + \frac{n}{m+p} + \frac{p}{n+m}}}$ 2p

$\frac{m}{n+p} + \frac{n}{m+p} + \frac{p}{n+m} \geq \frac{3}{2}$ 2p

$\Rightarrow 3\sqrt[3]{4^{\frac{m}{n+p} + \frac{n}{m+p} + \frac{p}{n+m}}} \geq 3\sqrt[3]{4^{\frac{3}{2}}} = 6$ 1p

Egalitatea în ambele inegalități pentru $\frac{m}{n+p} = \frac{n}{m+p} = \frac{p}{n+m} \Rightarrow m = n = p$ 2p



Problema 4.

a) $x = -\frac{b\bar{\alpha}}{a} \notin \mathbb{R}$ soluție $\Leftrightarrow a^2\alpha = b^2\bar{\alpha}$. În caz contrar: **1p**

$\left|\frac{d}{c}\right|=1 \Rightarrow \left(\frac{bx+a\alpha}{ax+b\bar{\alpha}}\right)^n = \frac{d}{c} = \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi)$ **1p**

$\frac{bx_k + a\alpha}{ax_k + b\bar{\alpha}} = u_k = \cos \frac{t+2k\pi}{n} + i \sin \frac{t+2k\pi}{n} \Rightarrow x_k = \frac{b\bar{\alpha}u_k - a\alpha}{b - au_k}, k = \overline{0, n-1}$ **1p**

$|a|=|b|=r \Rightarrow \bar{x}_k = \frac{\overline{b\alpha u_k - a\alpha}}{b - au_k} = \frac{\frac{r^2}{b} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{u_k} - \frac{r^2}{a} \cdot \bar{\alpha}}{\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{a} \cdot \frac{1}{u_k}} = x_k, \Rightarrow x_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n-1}$ **1p**

b) Reper cu originea în centrul cercului circumscris și axa reală OP **1p**

$A_k(z_k), z_k = R\varepsilon_k, \varepsilon_k$ - rădăcinile de ordin n ale unității, $P(Rx, 0)$ **1p**

$\prod_{k=1}^n PA_k = \prod_{k=1}^n |Rx - R\varepsilon_k| = R^n \prod_{k=1}^n |x - \varepsilon_k| = R^n \left| \prod_{k=1}^n (x - \varepsilon_k) \right| = R^n (x^n - 1) = PO^n - R^n \dots$ **1p**