



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

IAȘI

EDIȚIA a XXI-a

24-29 MAI 2024

PROBA ANALIZA DATELOR

CATEGORIA SENIORI 1

SUBIECTUL I. Devierea luminii stelelor de către Soare (8p)

Enunțul problemei:

În această problemă veți lucra cu date similare celor colectate în timpul faimoasei expediții Eddington din 1919, care a oferit unul dintre primele teste experimentale ale Teoriei Relativității Generale. Sarcina voastră va fi să analizați deplasarea luminii stelare cauzate de gravitația Soarelui în timpul unei eclipse și să o comparați cu predicțiile teoretice.

Date

În 1919, Sir Arthur Eddington a efectuat un experiment în timpul unei eclipse solare pentru a testa Teoria Relativității Generale a lui Einstein. Observând pozițiile stelelor din apropierea Soarelui în timpul eclipsei și comparându-le cu pozițiile lor normale, Eddington a oferit dovezi pentru curbarea luminii de către gravitație, la fel cum a prezis și Einstein cu 4 ani înainte. Einstein calculase că devierea unghiulară a razelor de lumină primite de la o stea este dublul valorii calculate din fizica Newtoniană.

Observarea stelelor în timpul unei eclipse solare totale este posibilă în ciuda prezenței Soarelui pe cer deoarece Luna acoperă complet discul luminos al Soarelui, permițând stelelor din apropierea Soarelui să fie vizibile pe cerul întunecat. Eddington a măsurat deviația unghiulară $\Delta\theta$ pentru 7 stele din apropierea discului solar și le-a notat în următorul tabel.

Constante:

$$k = 6.674 \cdot \frac{10^{-11} \text{Nm}^2}{\text{kg}^2}, M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}, R_{\odot} = 696000 \text{km}, c = 3 \cdot \frac{10^8 \text{m}}{\text{s}}, D_{\odot} = 32'.$$

Presupuneri

1. Deplasarea observată ($\Delta\theta$) a poziției unei stele datorată gravitației Soarelui (în arcsecunde) poate fi modelată astfel:

$$\Delta\theta = a/r + b$$

unde r este distanța unghiulară a stelei față de centrul Soarelui în unități de 50 de arcminute.

2. Coordonatele (x, y) sunt date în unități de 50 de arcminute ('), iar fotografia cerului poate fi considerată în plan.

Nr.	x (50')	y (50')	$\Delta\theta$ (")
11	-0.504	-1.685	0.2
10	1.342	1.052	0.32
6	-0.573	1.285	0.56
5	-0.978	0.413	0.54
4	0.454	0.597	0.84
2	0.359	-0.556	0.97
3	-0.517	-0.376	1.02

Utilizând datele de mai sus rezolvați următoarele cerințe:

- Calculați distanța unghiulară (exprimată ca multiplu de 50 de arcminute (')) și inversul acesteia și adaugați rezultatele într-un tabel. **(1.4p)**
- Pe hârtie milimetrică reprezentați grafic deviația unghiulară observată în funcție de inversul distanței unghiulare până la centrul Soarelui. **(2.5p)**
- Determinați coeficienții a , b utilizând metoda celor mai mici pătrate. Adăugați pe graficul de la punctul a) dreapta de cel mai bun fit și dreapta care reprezintă dependența deviației unghiulare de inversul distanței unghiulare a stelei până la centrul Soarelui așa cum este prezis de mecanica Newtoniană. **(2.5p)**
- Care ar fi devierea unghiulară a unei raze de lumină care trece tangențial pe lângă Soare în arcsecunde? **(0.6p)**
- Teoria relativității generalizate prezice că deviația unghiulară ($\Delta\theta$) a unei raze de lumină (în radiani) depinde de distanța față de centrul stelei pe lângă care trece (r), masa stelei (M), viteza luminii (c) și constanta atracției gravitaționale (k). Folosind analiză dimensională, aflați formula de dependență pentru deviația unghiulară. Puteți deduce cum depinde $\Delta\theta$ de r folosind subpunctele anterioare? **(0.5p)**
- Știind că în această formulă coeficientul de proporționalitate este 4, aflați formula exactă. Folosind valoarea deviației unghiulare pentru o rază tangentă la discul solar calculată în primul subpunct al problemei, aflați care ar fi masa Soarelui (presupunând $R_{\odot}$ fix) și comparați-o cu valoarea corectă.

Totodată, folosiți formula pentru a calcul care este valoarea corectă a deviației unghiulare la marginea discului solar, de data aceasta folosind masa corectă a Soarelui. **(0.5p)**

BAREM

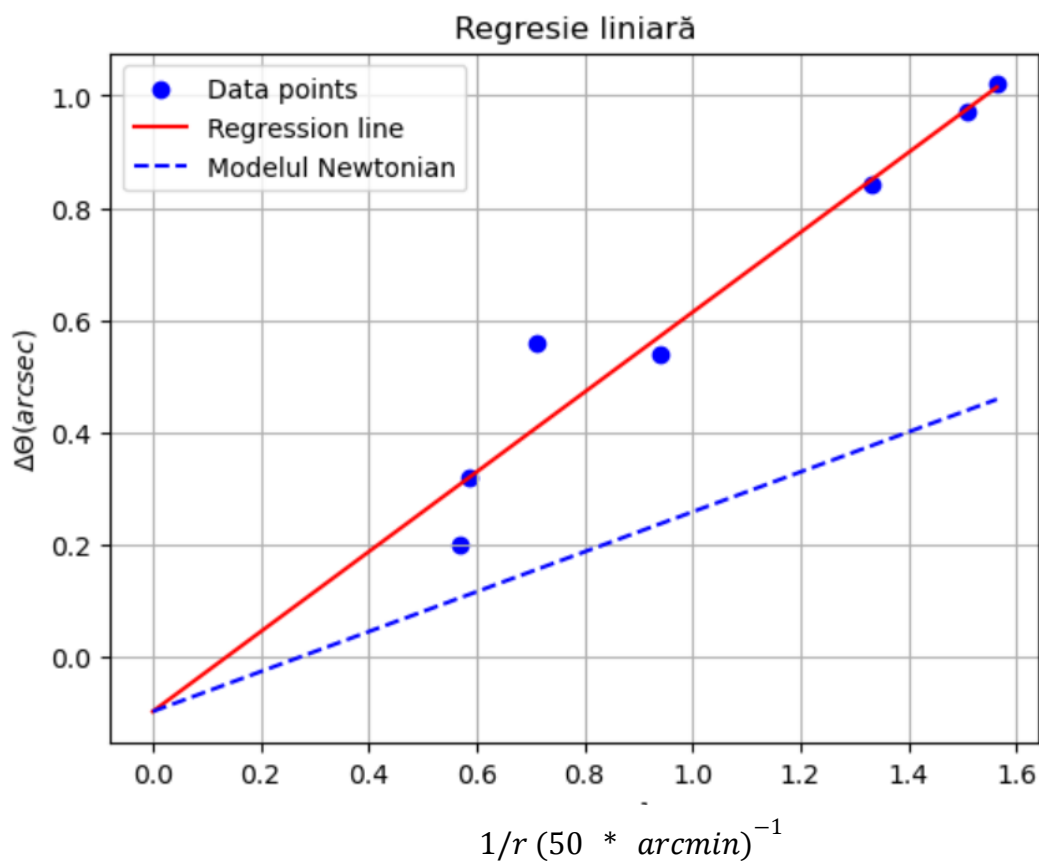
a) **14 * 0.1p = 1.4p**

Nr.	x (50')	y (50')	r (50')	$\frac{1}{r} (50 * arcmin)^{-1}$	$\overline{\frac{1}{r}}$	$\Delta(\frac{1}{r})$	$\Delta(\frac{1}{r})^2$
11	-0.504	-1.685	1.758	0.568	1.031	-0.462	0.2137
10	1.342	1.052	1.705	0.586		-0.444	0.1975
6	-0.573	1.285	1.406	0.710		-0.320	0.1024
5	-0.978	0.413	1.061	0.941		-0.088	0.0079
4	0.454	0.597	0.750	1.333		0.302	0.0914
2	0.359	-0.556	0.661	1.510		0.480	0.2304
3	-0.517	-0.376	0.639	1.564		0.533	0.2845

Nr.	$\Delta\theta('')$	$\overline{(\Delta\theta)}('')$	$\Delta(\Delta\theta)('')$
11	0.2	0.635714286	-0.435714286
10	0.32		-0.315714286
6	0.56		-0.075714286
5	0.54		-0.095714286
4	0.84		0.204285714
2	0.97		0.334285714

3	1.02		0.384285714

b)



Punctele sunt corect ilustrate pe grafic

$7 \times 0,3p = 2.1p$

Mărimile fizice și unitățile de măsură sunt trecute pe axe

0.2p

Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite

0.1p

Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite

0.1p

c)

$$a = \frac{\sum_{i=1}^7 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right) (\Delta\theta_i - \overline{\Delta\theta})}{\sum_{i=1}^7 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right)^2} = 0.7107 \text{ (1p)}$$

$$b = \overline{\Delta\theta} - a \frac{1}{r} = -0.0969 \text{ (0.5p)}$$

dreapta de cel mai bun fit (**0.5p**) - vezi grafic

dreapta prezisă de mecanica Newtoniană - dreapta cu panta jumătate din dreapta de cel mai bun fit - vezi grafic (**0.5p**)

d) Pentru o rază tangențială la discul solar avem $r = 16'$. Folosind formula de dependență liniară obținem

$$\Delta\theta = \frac{a}{r} + b = \frac{0.7107}{16/50} - 0.0969 = 2.124'' \text{ (0.6p)}$$

- e) În subpunctele anterioare am obținut că $b \approx 0$, deci putem deduce că $\Delta\theta \propto \frac{1}{r}$ (0.25p). Acum putem scrie:

$$1 = [k]^d [c]^e [M]^f [r]^{-1}$$

$$1 = (kg^{-1} m^3 s^{-2})^d (m s^{-1})^e (kg)^f (m)^{-1}$$

$$-d + f = 0$$

$$3d + e - 1 = 0$$

$$-2d - e = 0$$

Rezolvând sistemul de 3 ecuații cu 3 variabile obținem $d = 1, e = -2, f = 1$. Deci formula este:

$$\Delta\theta \propto \frac{kM}{c^2 r} \text{ (0.25p)}$$

- f) Știind coeficientul de proporționalitate, avem acum formula finală $\Delta\theta = \frac{4kM}{c^2 r}$

Din primul subpunct al problemei, pentru o rază tangentă la discul solar, $\Delta\theta = 2.124''$. Totodată, $r = R_{\odot} = 696000 \text{ km}$. Putem calcula $M_{\odot}$ astfel:

$$M_{\odot} = \frac{\Delta\theta \cdot c^2 \cdot R_{\odot}}{4k} = \frac{(2.124/3600) \cdot (\pi/180) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (696000 \cdot 1000)}{4 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}}$$

$$M_{\odot} = 2.416 \cdot 10^{30} \text{ kg} \text{ (0.25p)}$$

Această valoare este cu 21.5% mai mare decât valoarea corectă.

Acum folosind $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, aflăm valoarea corectă pentru $\Delta\theta$.

$$\Delta\theta = \frac{4kM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} = \frac{4 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot (696000 \cdot 1000)} \cdot (180/\pi) \cdot 3600 = 1.749'' \text{ (0.25p)}$$

SUBIECTUL II. Curba de lumină. (8p)

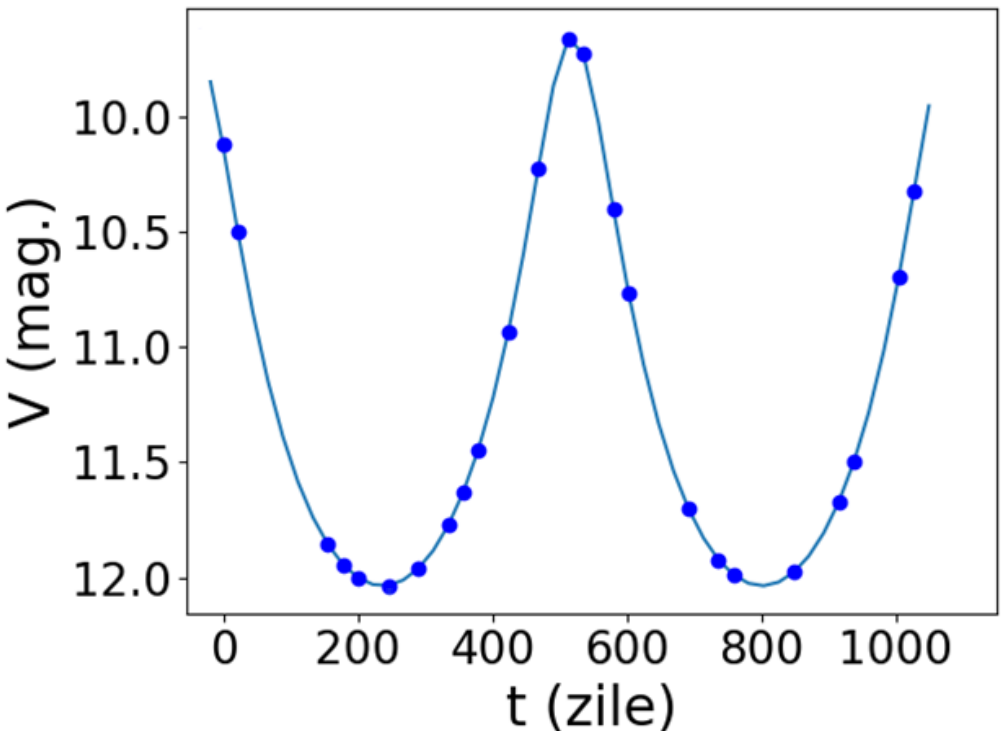
Fluxul de lumină provenit de la diferiți aștri poate varia din numeroase motive. Atunci când observăm un astru pentru o perioadă suficientă de timp, putem identifica uneori un anumit trend periodic al strălucirii, care reiese din curba de lumină (reprezentarea grafică a magnitudinii/strălucirii în funcție de timp).

Vom analiza în continuare curba de lumină a unui asteroid din sistemul Solar, urmărit o lungă perioadă de timp. Asteroidul din acest studiu are două proprietăți speciale: este aproape perfect sferic și prezintă o suprafață omogenă din punct de vedere compozițional. Se cunoaște diametrul asteroidului, $D = 200 \text{ km}$. În tabel sunt date momentul observării și magnitudinea în banda V. Asteroidul se mișcă pe o orbită circulară în jurul Soarelui.

- Trasați curba de lumină a asteroidului reprezentând grafic magnitudinea în funcție de timp. (3p)
- Determinați perioada de rotație a asteroidului în jurul Soarelui și raza orbitei circulare. (2p)
- Determinați albedoul asteroidului. (2p)
- Determinați unghiul de fază al asteroidului la momentul $t = 0$. (1p)

t (zile)	V (mag.)
0	10.12
22	10.5
157	11.86
179	11.94
201	12.0
246	12.03
291	11.96
335	11.77
358	11.63
380	11.45
425	10.94
470	10.22
514	9.66
537	9.73
581	10.4
604	10.76
693	11.7
738	11.92
760	11.99
850	11.98
917	11.67
939	11.5
1006	10.69
1029	10.33

Mag. aparentă în V	– 26.74
Distanța Pământ – Soare	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
1 an sideral, $P_{\oplus}$	365.25 zile

Rezolvare	Punctaj
a) Punctele sunt corect ilustrate pe grafic 24 x 0,1p = 2.4p Mărimile fizice și unitățile de măsură sunt trecute pe axe 0.2p Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite 0.2p Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite 0.2p  b) Din grafic obținem perioada sinodică $P_s = 565 \text{ zile } (\pm 5 \text{ zile})$ dar $\frac{1}{P_s} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_{ast}}$ de unde $P_{ast} = 1030 \text{ zile } (\pm 5 \text{ zile})$ Aplicând Kepler III, $r = \sqrt[3]{\left(\frac{P_{ast}}{1 \text{ an}}\right)^2} = 2,0 \text{ UA}$ c) Fluxul reflectat de asteroid este $F_{refl} = A (\text{albedo}) \times \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \times \frac{\pi D^2}{4}$ Fluxul reflectat de asteroid măsurat de pe Pământ va fi	3 0,5 0,5 1

$$F = \frac{F_{refl}}{4\pi\Delta^2} \times f(\phi)$$

unde $f(\phi) = \frac{1+\cos\phi}{2}$ este funcția de fază.

La conjuncție avem $f(\phi) = 1$,

$$F = \frac{AL_{\odot}D^2}{64\pi r_{PS}^2\Delta^2}$$

Constanta solară corespunzătoare magnitudinii în banda V este

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_{PS}^2}$$

Din legea lui Pogson obținem

$$\frac{F}{F_{\odot}} = 10^{-0.4(V-V_{\odot})}$$

$$\frac{AD^2 r_{PS}^2}{16r_{PS}^2\Delta^2} = 10^{-0.4(V-V_{\odot})}$$

$$A = \frac{16r_{PS}^2\Delta^2}{D^2 r_{PS}^2} \times 10^{-0.4(V-V_{\odot})}$$

$$A = 0.10 (\pm 0.01)$$

Notații:

r_{PS} – distanța Pământ – Soare

r – distanța asteroid – Soare

Δ – distanța asteroid – Pământ

ϕ – unghiul de fază

P_S – perioadă sinodică asteroid

$$P_S = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

d)

$$\frac{\sin\phi}{r_{PS}} = \frac{\sin(\pi - \phi - \omega_s(t-t_0))}{r}$$

$$\frac{\sin\phi}{r_{PS}} = \frac{\sin(\phi + \omega_s\Delta t)}{r} = \frac{\sin\phi\cos\omega_s\Delta t + \cos\phi\sin\omega_s\Delta t}{r}$$

$$tg\phi = \frac{\sin\omega_s\Delta t}{\frac{r}{r_{PS}} - \cos\omega_s\Delta t}$$

Din grafic, la momentul de intensitate maximă avem

$$t = 515 \text{ zile}$$

De unde obținem momentul la care a avut loc conjuncția înainte de $t = 0$,

$$t_0 = t - P_S = -50 \text{ zile } (\pm 5 \text{ zile})$$

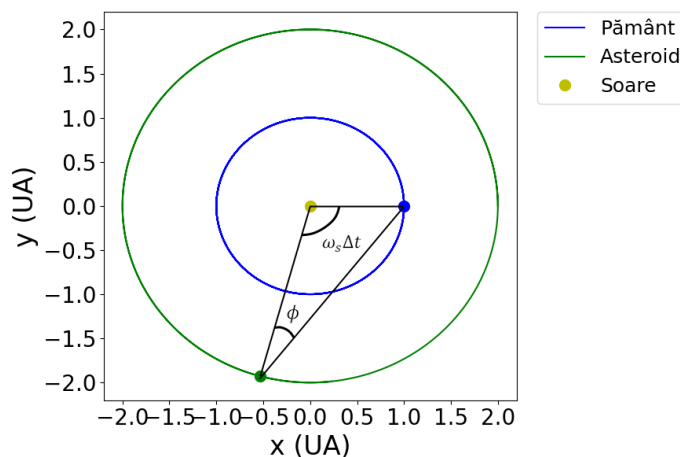
Luând $t = 0$ și înlocuind $\Delta t = 0 - (-50) = 50 \text{ zile}$, se obține în relația unghiului de fază

$$tg\phi = \frac{\sin 2\pi \frac{50 \text{ zile}}{565 \text{ zile}}}{\frac{2 \text{ UA}}{1 \text{ UA}} - \cos 2\pi \frac{50 \text{ zile}}{565 \text{ zile}}}$$

de unde

$$tg\phi = 0.46$$

$$\phi = 25^\circ (\pm 1^\circ)$$



0.5

1.5

0.25

0.25

0.5

SUBIECTUL III. Relația masă-luminozitate (9p)

În astronomie există o relație care leagă masa și luminozitatea unei stele. În forma ei generală, se poate scrie ca:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\beta}$$

unde L este luminozitatea stelei, M este masa stelei, $L_{\odot}$ este luminozitatea Soarelui, $M_{\odot}$ este masa Soarelui, iar α și β sunt coeficienți care variază în funcție de masa stelei pentru care este aplicată relația. Într-o primă aproximație se poate presupune că acești coeficienți sunt constanți în cadrul unuia dintre cele trei intervale de masă: mase mici, mase intermediare, mase mari.

- a) Care este valoarea masei minime posibile pentru o stea? De ce există o astfel de valoare minimă? **(0.5p)**

În tabelul 1 de mai jos sunt date masele și luminozitățile a 22 de stele cu mase mici sau intermediare.

- b) Pe foaia cu scară logaritmică primită împreună cu subiectele, marcați punctele corespunzătoare. Această foaie va fi predată la final împreună cu rezolvările. **(3p)**

Tabel 1 Mase și luminozități pentru stele mici și intermediare

Steaua	Masa ($M_{\odot}$)	Luminozitatea ($L_{\odot}$)
S1	0,88	61×10^{-2}
S2	3,61	148,55
S3	27,95	$61,05 \times 10^4$
S4	0,22	72×10^{-4}
S5	0,41	28×10^{-3}
S6	0,17	44×10^{-4}
S7	0,29	$13,74 \times 10^{-3}$
S8	14,66	$45,5 \times 10^3$
S9	32,57	$11,3 \times 10^5$
S10	7,69	$3,49 \times 10^3$
S11	21,21	$20,25 \times 10^4$
S12	0,10	$13,10 \times 10^{-4}$
S13	0,25	$93,9 \times 10^{-4}$
S14	0,32	$16,40 \times 10^{-3}$
S15	0,14	$22,23 \times 10^{-4}$
S16	0,55	$54,15 \times 10^{-3}$
S17	0,62	$70,12 \times 10^{-3}$
S18	42,37	$32,5 \times 10^5$
S19	1,25	2,40
S20	2,74	56,40
S21	1,89	12,76
S22	1	$99,9 \times 10^{-2}$

- c) Care sunt stelele de masă mică și care sunt stelele de masă intermediară? Dați răspunsul în funcție de numele lor: litera S urmată de un număr. Justificați răspunsul. **(0.5p)**
- d) Determinați valorile coeficienților α și β pentru mase mici, respectiv pentru mase intermediare. **(2p)**
- e) Descrieți cum ați fi rezolvat problema dacă în loc de foaia cu scară logaritmică vi s-ar fi dat o simplă hârtie milimetrică. **(0.5p)**

Pentru stelele de mase mari, exponentul β are valoarea 1. În acest caz nu este nevoie de scară logaritmică pentru a determina coeficientul rămas.

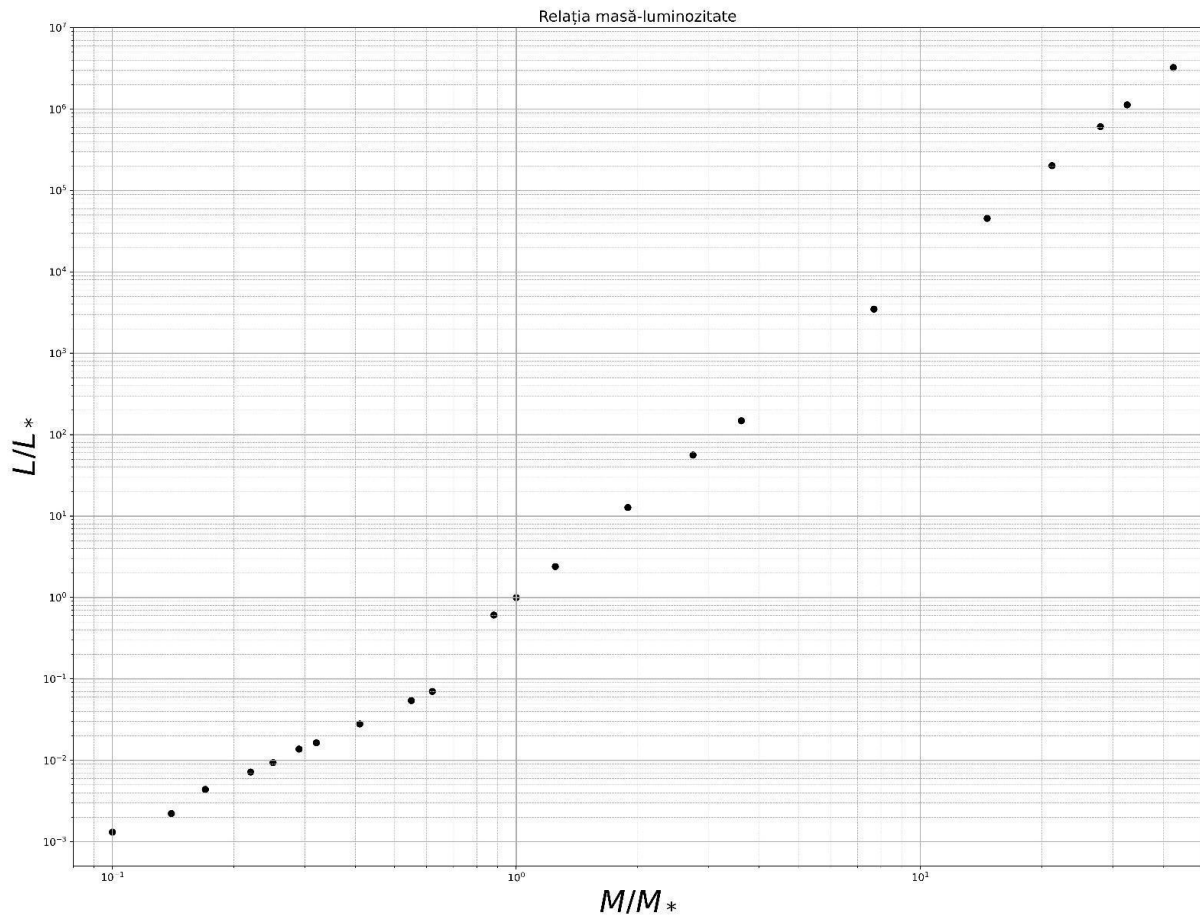
- f) Folosind datele din Tabelul 2 pentru stele masive, marcați punctele pe hârtia milimetrică primită și determinați valoarea lui α . Hârtia milimetrică va fi predată la final împreună cu rezolvările. **(2.5p)**

Tabel 2. Mase și luminozități pentru stele mari.

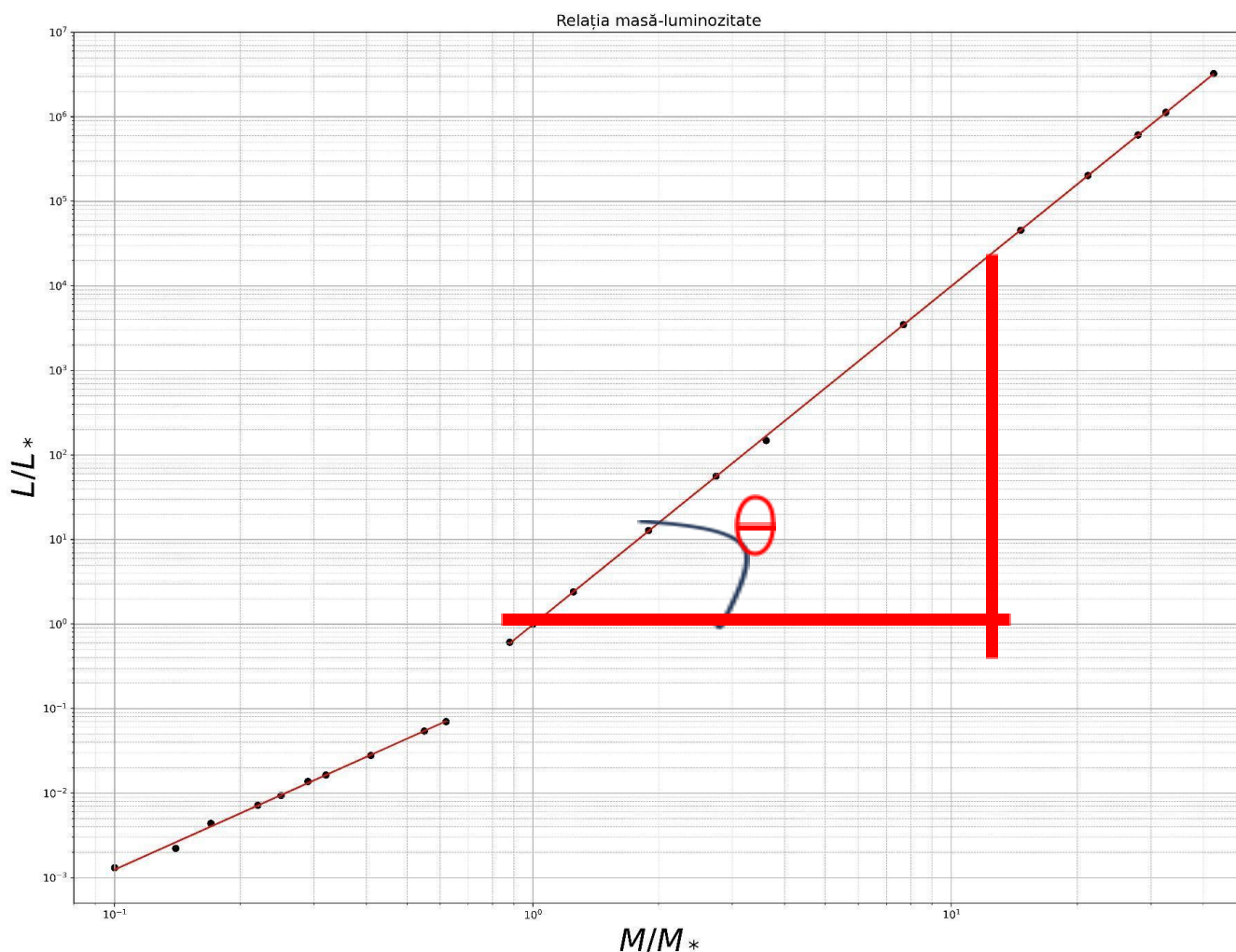
Stea	Masa ($M_{\odot}$)	Luminozitatea ($L_{\odot} \times 10^6$)
S23	65.23	2.21
S24	74.89	2.63
S25	98.21	3.40
S26	124.58	4.45
S27	109.51	3.95
S28	89.12	3.22
S29	81.81	2.95
S30	116.11	4.16
S31	132.76	4.57
S32	70.12	2.51

BAREM

- a) Masa minimă posibilă pentru o stea este de $0,08M_{\odot}$. Aceasta este masa minimă necesară pentru ca o stea să susțină fuziunea hidrogenului în miezul său, procesul care definește o stea. (0.5p)
- b) Punctele sunt corect ilustrate pe grafic $20 \times 0,15p = 3p$



- c) Masă mică: S4, S5, S6, S7, S12, S13, S14, S15, S16, S17
 Masă intermediară: S1, S2, S3, S8, S9, S10, S11, S18, S19, S20, S21, S22 (0.25p)
 Trecerea de la masa mică la masă intermediară se poate observa în grafic prin discontinuitatea ce are loc în apropierea stelelor cu masa egală cu masa soarelui. (0.25p)
- d)



Analizând relația din problemă prin aplicarea logaritmului și în stânga și în dreapta vom obține:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\beta}$$

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = \log \left(\alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\beta} \right) = \log a + \beta \log \frac{M}{M_{\odot}}$$

Calculăm acum panta celor două dependențe liniare, întâi pentru **mase mici** utilizând stelele S5 și S12:

$$\tan \theta = \frac{\log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} - \log \frac{L_{S12}}{L_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}} = \frac{\log a + \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log a - \beta \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}}$$

$$\tan \theta = \frac{\log a + \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log a - \beta \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}} = \beta$$

Deci coeficientul β se poate calcula ca:

$$\beta = \frac{\log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} - \log \frac{L_{S12}}{L_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}} = \frac{\log 0,028 - \log 0,00131}{\log 0,41 - \log 0,1} = 2,17 \pm 0.02 \text{ (0.5p)}$$

Orice valoare apropiată răspunsului se punctează maxim, dacă procedura din barem a fost urmată și calculele sunt corecte.

Coeficientul α se calculează din relația masa-luminozitate pentru oricare dintre punctele date, care se află pe linie:

$$\log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} = \log a + \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}}$$

$$\log a = \log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} - \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}}$$

$$\log a = \log 0,028 - 2,17 \times \log 0,41$$

$$\log a = -0,713 \Rightarrow \alpha = 0,19 \pm 0.01 \text{ (0.5p)}$$

Orice valoare apropiată răspunsului se punctează maxim, dacă procedura din barem a fost urmată și calculele sunt corecte.

Relația pentru stele de mase mici este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 0,19 \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2,17}$$

Pentru **mase intermediare**, repetăm procesul de mai sus, considerând stelele S22 și S10:

$$\beta = \frac{\log \frac{L_{S10}}{L_{\odot}} - \log \frac{L_{S22}}{L_{\odot}}}{\log \frac{M_{S10}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S22}}{M_{\odot}}} = \frac{\log 3490 - \log 1}{\log 7,69 - \log 1} = 3,999 \approx 4 \pm 0.02 \text{ (0.5p)}$$

Orice valoare apropiată răspunsului se punctează maxim, dacă procedura din barem a fost urmată și calculele sunt corecte.

$$\log a = \log \frac{L_{S22}}{L_{\odot}} - \beta \log \frac{M_{S22}}{M_{\odot}}$$

$$\log a = \log 1 - 2,17 \times \log 1 = 0 \Rightarrow$$

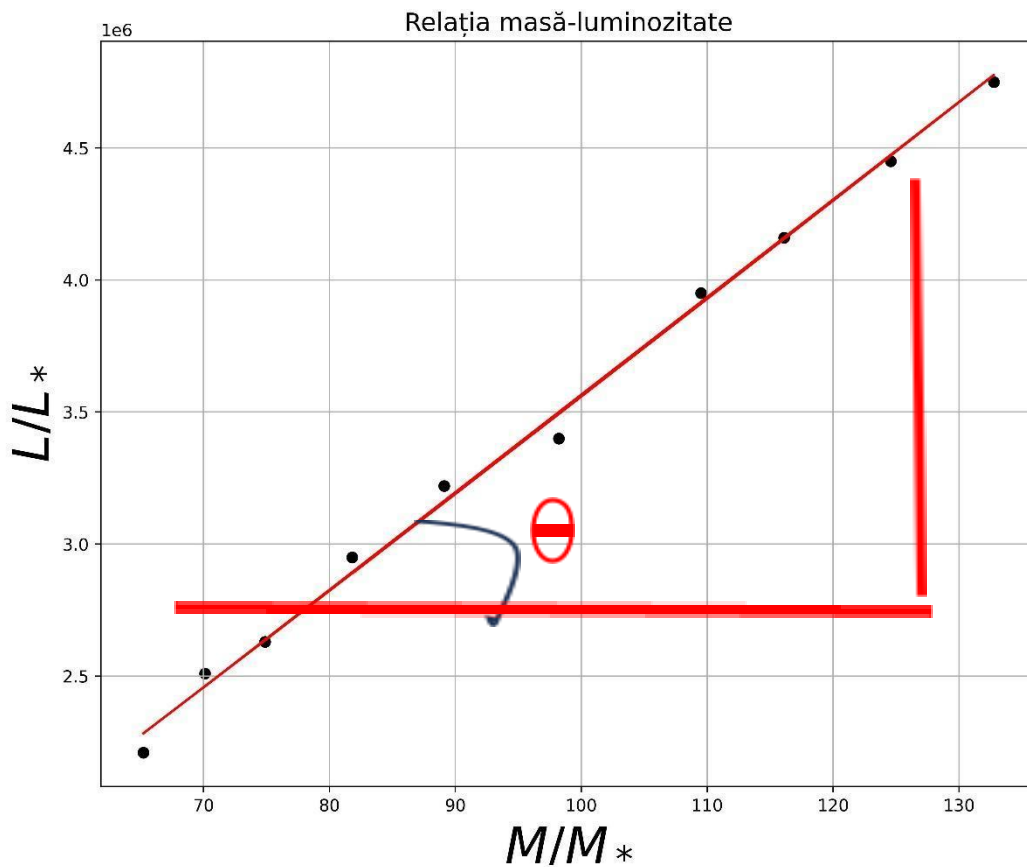
$$\Rightarrow \alpha = 10^0 = 1 \pm 0.01 \text{ (0.5p)}$$

Relația pentru stele cu mase intermediare este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4$$

- e) Dacă în loc de foaia cu scară logaritmică am fi folosit hârtie milimetrică, pentru fiecare stea ar fi trebuit să calculăm $\log \frac{L}{L_{\odot}}$ și $\log \frac{M}{M_{\odot}}$. Realizând apoi graficul $\log \frac{L}{L_{\odot}}$ pe axa OY și $\log \frac{M}{M_{\odot}}$ pe axa OX am fi obținut aceleași puncte și aceleași drepte printre puncte ca în cazul foi logaritmice, de unde am fi determinat în același mod α și β . **(0.5p)**
- f) Pentru stele cu mase mari, relația masă-luminozitate este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^1$$



- Punctele sunt corect ilustrate pe grafic 10 x 0,15p = **1.5p**
- Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite **0.2p**
- Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite **0.1p**

Aplicând relația pentru stelele S24 și S30 obținem:

$$\tan \theta = \frac{\frac{L_{S30}}{L_{\odot}} - \frac{L_{S24}}{L_{\odot}}}{\frac{M_{S30}}{M_{\odot}} - \frac{M_{S24}}{M_{\odot}}} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{4,16 \times 10^6 - 2,63 \times 10^6}{116,11 - 74,89} = (3,71 \pm 0.02) \times 10^4 \quad (0.7p)$$

Relația pentru stele cu mase mari este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 3,71 \times 10^4 \times \frac{M}{M_{\odot}}$$

Pentru rezultate obținute cu metoda celor mai mici pătrate care sunt în concordanță cu rezultatele din barem se acordă punctaj maxim.