

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 26 februarie 2017
Clasa a VIII – a
VARIANTA 1

VIII

SUBIECTE:

1.a). Se consideră numerele:

(4p)

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

Calculați media aritmetică a numerelor a și b și demonstrați că numărul $a > 22$.

Prof. Borocan Dumitru

b). Determinați numerele x, y, z știind că $x + y + z = \frac{3}{2}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$.

(3p)

E:14907, G.M Nr.10/2015

2. a) Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci are loc inegalitatea: $\frac{x^3}{x^2 + x + 1} \leq x + \frac{1}{3}$;

(3p)

b) Să se arate că $(\forall)n \in \mathbb{N}$, are loc relația: $\frac{1}{3} + \frac{8}{7} + \dots + \frac{n^3}{n^2 + n + 1} < \frac{n(3n+5)}{6}$.

(4p)

Prof. Rădulescu Mariana

3. Pe planul triunghiului ABC echilateral se ridică de aceeași parte a planului perpendicu-

larele BB' și CC' . Știind că O este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ și $CC' = AB = 12\text{cm}$,

calculați:

a) lungimea segmentului (BB') astfel încât $\triangle AB'C'$ să fie isoscel;

(3p)

b) distanța de la C' la dreapta $g = (AB'C') \cap (ABC)$, dacă $BB' = 6\text{cm}$.

(2p)

c) distanța de la O la planul $(AB'C')$, dacă $BB' = 6\text{cm}$.

(2p)

Prof. Borocan Dumitru

4. Fie O un punct situat pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ și M, N, P respectiv proiecțiile lui A pe OB, OC, OD . Arătați că:

a) $OC \perp (MNP)$.

(4p)

b) $\frac{MB}{MO} + \frac{PD}{PO} = \frac{NC}{NO}$.

(3p)

Prof. Rădulescu Mariana

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.

Subiecte selectate și propuse de profesor Dumitru Borocan, Argeș