

**MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ****2018. január 27.****IX. OSZTÁLY**

- 1.) a) Mutasd ki, hogy bármely x, y, z pozitív valós számok esetén igaz az

$$\frac{x + 2y\sqrt{x + 2\sqrt{z}}}{x} + \frac{y + 2z\sqrt{y + 2\sqrt{x}}}{y} + \frac{z + 2x\sqrt{z + 2\sqrt{y}}}{z} \geq 15 \text{ egyenlőtlenség!}$$

- b) Oldd meg a valós számok halmazán a $|x+1| \cdot \left[\frac{2x}{x^2+1} \right] = -\frac{1}{2}$ egyenletet!

- 2.) Legyen $S_n = 3n^2 - 2n$ az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat első n tagjának az összege.

- a) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat egy számtani haladvány.

- b) Határozd meg annak a $(b_n)_{n \geq 1}$ sorozatnak első 2018 tagjának az összegének utolsó számjegyét, amely egy mértani haladvány $b_1 = a_1$ és $b_2 = a_2$ tagokkal.

- 3.) Az $ABCD$ konvex négyszögben legyenek E és F az AC illetve a BD átlókon elhelyezkedő pontok úgy, hogy $AE = \frac{1}{3}AC$ és $BF = \frac{2}{3}BD$.

- a) Igazold, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{EF}$.

- b) Ha $\overrightarrow{EF} = 0$ igazold, hogy az $ABCD$ négyszög egy trapéz!

- 4.) Az ABC hegyesszögű háromszög belsejében adott az M pont. A $\widehat{BMC}$, $\widehat{AMC}$ és $\widehat{BMA}$ szögek szögfelezői a BC , AC , illetve AB oldalakat rendre a D , E és F pontokban metszik. Igazold, hogy az AD , BE és CF összefutó egyenesek!

Megjegyzés:**Minden feladat kötelező.****Minden feladat 10 pontot ér.****Munkaidő 3 óra.**