OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A V - A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Suma a două numere naturale este 24. Care este cea mai mare valoare posibilă a produsului lor?

2. Se consideră numerele naturale:

$$a = 10^{2019} - 9\cdot 10^{2018} - 9\cdot 10^{2017} - \ldots - 9\cdot 10^{86}$$

$$b = 5^{9}\cdot 25^{2}\cdot 125^{5}\cdot 625^{14}\cdot\left(2^{87} + 2^{86} + 2^{85} + 2^{84}\right)$$

a) Să se compare numerele a și b.

b) Să se determine numărul cifrelor diferite ale numărului $n = (a+b)^{3}$.

c) Să se afle restul împărțirii lui a la b.

3. Împărțind suma a două numere naturale la treimea diferenței lor se obține câtul 4 și restul 15. Să se afle cele două numere, știind că că unul dintre ele este cu 2019 mai mare decât celălalt.

4. Suma a 15 numere naturale consecutive este un număr cu cifre diferite, printre care se află cifrele 0, 1, 2 și 4. Care este cel mai mic număr posibil dintre cele 15 numere?

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A VI - A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Se consideră mulțimile $A = \{12 \cdot m + 5 \mid m \in N\}$ și $B = \{18 \cdot p + 11 \mid p \in N\}$.

a) Arătați că numărul $101 \in A \cap B$.

b) Arătați că $10^n + 1 \in A \cap B$, pentru orice $n \in N, n \geq 2$.

2. a) Fie numărul natural $A = (1 + 2 + 3 + \dots + 999) \cdot n + 1000$. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul A este divizibil cu 10^6 .

b) Aflați perechile de numere naturale care au produsul 2400 și $c.m.m.d.c$ este 10.

3. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ având măsura de 108^0, considerăm punctul P și notăm cu $a = m(\sphericalangle AOP), b = m(\sphericalangle BOP)$.

a) Aflați a și b, dacă $17 \cdot a - 19 \cdot b = 18^0$.

b) Fie $M \in Int(\sphericalangle AOP)$, $N \in Int(\sphericalangle POB)$ astfel încât $m(\sphericalangle BOM) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOM)$, $m(\sphericalangle BON) = \frac{1}{5} \cdot m(\sphericalangle AON)$. Arătați că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ au aceeași bisectoare.

4. Se consideră unghiurile AOB, BOC și BOD astfel încât $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt neadiacente complementare. Dacă $m(\sphericalangle COD) = 135^0$, determinați măsura $\sphericalangle AOB$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A VII - A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Arătați că $\left(\frac{7}{1}+1\right)\left(\frac{7}{2}+1\right)\left(\frac{7}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{7}{9}+1\right)=\left(\frac{9}{1}+1\right)\left(\frac{9}{2}+1\right)\left(\frac{9}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{9}{7}+1\right)$.

2. Pe prelungirea laturii CD a paralelogramului ABCD se ia punctul P astfel încât $CD = 2\cdot DP$.

Notăm $BD\cap AP=\{M\}$, $BC\cap PA=\{N\}$, $DN\cap AB=\{G\}$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului MBN.

3. a) Demonstrați că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2018^2}<1$

b) Arătați că oricare ar fi n, număr rațional pozitiv, astfel încât

$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\ldots+\frac{2018}{n+2018}=2017$, atunci $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+2018}=\frac{1}{n}$.

4. În triunghiul ABC, AB=AC, $m(\widehat{A})=40^0$, considerăm $D\in(AC)$ astfel încât $m(\widehat{ABD})=60^0$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în E, iar T, aparține bisectoarei unghiului A, astfel încât $E\in(AT)$ și ET=AB. Arătați că ABTC este romb.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A VIII- A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) Dacă $x, y \in R$ astfel încât $-2 \leq x \leq 3$ și $x - 5y + 2 = 0$, calculați

$$E = \sqrt{(x+2)^2 + 2y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 2(y-1)^2}.$$

b) Arătați că dacă $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, atunci $x \in [-1, 5]$ și $y \in [0, 6]$.

2. Se consideră numerele:

$$A = (\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4}+\sqrt{3}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2019}-\sqrt{2018}) \text{ și}$$

$$B = (\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4}-\sqrt{3}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2019}+\sqrt{2018}).$$

a) Să se calculeze $A \cdot B$ și să se arate că $A + B > 2$.

b) Să se calculeze $\left[\dfrac{B}{1010 \cdot A}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AA' = 3\sqrt{5}\ cm$, $AB = 6\ cm$ și $BC = 3\ cm$ notăm cu M mijlocul segmentului AB. Aflați tangenta unghiului determinat de palanele $A'DM$ și $D'DM$.

4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC. Punctul M este mijlocul muchiei BC, măsura unghiului dintre dreptele SM și SA este egală cu 90^0 și $SA = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Arătați că triunghiul SAC este dreptunghic.

b) Fie A', B' mijloacele muchiilor SA, respectiv SB, iar P și Q proiecțiile punctelor A' și respectiv B' pe planul (ABC). Calculați aria triunghiului CPQ.