

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

Problema 1. În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{n+4} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{n+1}{n+4} \cdot \overrightarrow{BA}$, respectiv $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{n+2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CB}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că există un număr $\alpha > 0$, astfel încât $\overrightarrow{MB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CM}$;

b) Să se determine valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât dreptele AM, BN și CP să fie concurente.

Barem de corectare. a) Din relația $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, care se scrie echivalent $n(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow n \cdot \overrightarrow{CM} = 4 \cdot \overrightarrow{MB}$, rezultă că $M \in (BC)$ și $\overrightarrow{MB} = \frac{n}{4} \cdot \overrightarrow{CM}$, adică $\alpha = \frac{n}{4}$. (3p)

b) Analog, din celelalte două relații se obține că $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, $\frac{NC}{NA} = \frac{n+1}{3}$ și $\frac{PA}{PB} = \frac{n+2}{2}$. Dreptele AM, BN și CP sunt concurente, dacă și numai dacă $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 24$, de unde se obține că $n = 2$. (4p)

Problema 2. Fie a, b și c trei numere reale care verifică relațiile $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 56$ și $abc = 48$. Să se calculeze $ab + ac + bc$ și valoarea expresiei

$$E = \frac{1}{ab + c - 11} + \frac{1}{bc + a - 11} + \frac{1}{ca + b - 11}.$$

Barem de corectare. Avem $ab + ac + bc = \frac{1}{2}((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = 44$, (2p)

respectiv $E = \frac{1}{ab - a - b + 1} + \frac{1}{bc - b - c + 1} + \frac{1}{ca - c - a + 1} = \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(a-1)(c-1)}$. (3p)

de unde $E = \frac{a + b + c - 3}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{a + b + c - 3}{abc - (ab + ac + bc) + (a + b + c) - 1} = \frac{3}{5}$. (2p)

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) dacă m și n sunt două numere naturale de aceeași paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2};$$

b) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$

Barem de corectare. a) Inegalitatea se scrie echivalent, $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$ (2p)

Cum numerele m și n au aceeași paritate, $\text{sgn}(a^m - b^m) = \text{sgn}(a^n - b^n)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, de unde obținem că $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$, adică are loc inegalitatea din enunț. (2p)

b) Folosind inegalitatea de la punctul a), avem $M_s = \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^4+b^4}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$ (3p)

Problema 4. Fie numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(m, n) = 1$.

a) Să se arate că mulțimea $\left\{ \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \mid k = 1, 2, \dots, n \right\}$ are n elemente;

b) Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^n \left[\frac{mk}{n} \right].$

Notă. $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului x .

Barem de corectare. a) Dacă $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $i \neq j$, atunci $\left\{ \frac{mi}{n} \right\} = \left\{ \frac{mj}{n} \right\} \Leftrightarrow \frac{mi}{n} - \frac{mj}{n} = \frac{m(i-j)}{n} \in \mathbb{Z}$. Dar cum $(m, n) = 1$, rezultă că $n \mid i - j$, ceea ce este imposibil deoarece $0 < |i - j| < n$. Așadar, mulțimea $\left\{ \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \mid k = 1, 2, \dots, n \right\}$ are n elemente. (3p)

b) Pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, din teorema împărțirii cu rest, există un $q_k \in \mathbb{N}$ și un $r_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, astfel încât $mk = n \cdot q_k + r_k$, de unde $\left\{ \frac{mk}{n} \right\} = \left\{ q_k + \frac{r_k}{n} \right\} = \frac{r_k}{n}$. Obținem astfel

că $\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{mk}{n} \right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}$ (2p)

Așadar, $S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{mk}{n} - \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \right) = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{mk}{n} \right\} = \frac{m(n+1)}{2} - \frac{n-1}{2}$ (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.