

Barem cls. a IX-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv.

1.

a) Folosind inegalitatea cunoscută $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ rezultă $xy + yz + xz \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{a^2}{3}$ 3 p

b) $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} < \frac{x+(y+z)}{2} + \frac{y+(x+z)}{2} + \frac{z+(x+y)}{2} = \frac{3(x+y+z)}{2} = \frac{3a}{2}$ (egalitatea ar avea loc dacă $x = y = z$, $y = x + z$, $z = x + y$, adică $x = y = z = 0$, fals).....4 p

2. a) Ar rezulta $\sqrt{n^2} = 1 \cdot \sqrt{n+1}$, adică $n = \sqrt{n+1}$ sau $n^2 - n - 1 = 0$, care nu are soluții numere naturale.....3 p

b) Ar rezulta $\sqrt{n+1} = 1 + kr$, $\sqrt{n} = 1 + pr$, $k, p \in \mathbb{Z}^*$, $r \in \mathbb{R}^*$ și

$$\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1} = \frac{k}{p} \in \mathbb{Q}^*, \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1)}{n-1} \in \mathbb{Q}^*, \text{ adică } (\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1) \in \mathbb{Q}^*$$

$$(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1) = \frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+1} \cdot \frac{n-1}{\sqrt{n}-1}.$$

Dacă $(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1)$ ar fi rațional, atunci și $(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n}-1)$ ar fi rațional.....2 p

Ar rezulta că $(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1) + (\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n}-1)$ este rațional, adică $2\sqrt{n(n+1)} - 2$ rațional, fals, deoarece $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$...2 p

3. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = (1-m)\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = q\overrightarrow{AD} + (1-p)\overrightarrow{DC}$ 2 p

Va rezulta $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = (1-m+1-p)\overrightarrow{AB} + (n+q)\overrightarrow{BC}$,

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}), \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } (1-m+1-p-\alpha)\overrightarrow{AB} = (-n-q+\alpha)\overrightarrow{BC}$$

.....3 p

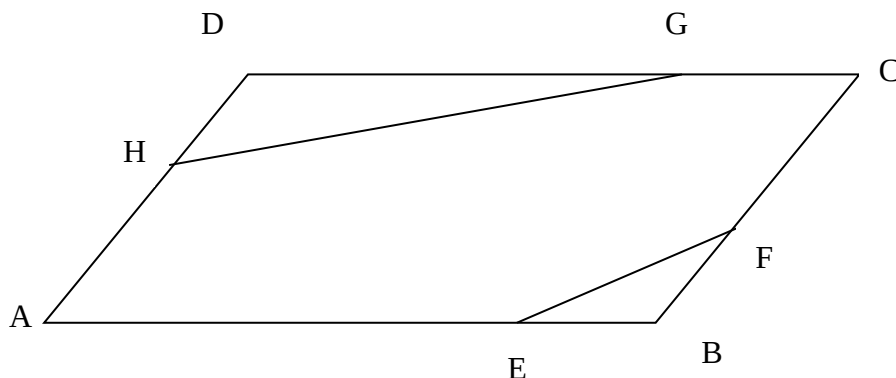
$\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ necoliniari, $1 - m + 1 - p - \alpha = -n - q + \alpha = 0$, deci

$\alpha = 1 - m + 1 - p = n + q$ și $m + n + p + q = 2$2 p

4. a) $4\overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{DP} + 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$3 p

b) $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DN}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{DQ}$, folosind relația de la punctul a) și D, Q, F coliniare.....4 p

3.



4.

