

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

27 ianuarie 2018

BAREM

CLASA A XII-A

(3 ore/săptămână)

1.)	Din oficiu	1p
a)	$(1,5) \circ (1,-2) = (1 \cdot 1, 1 \cdot (-2) + 5) = (1,3)$	2p
b)	$(\forall)(a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3) \in G :$ $((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) = (a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3))$ $((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) = (a_1 a_2, a_1 x_2 + x_1) \circ (a_3, x_3) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 x_3 + a_1 x_2 + x_1) (1)$ $(a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3)) = (a_1, x_1) \circ (a_2 a_3, a_2 x_3 + x_2) = (a_1 a_2 a_3, a_1 (a_2 x_3 + x_2) + x_1) =$ $= (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 x_3 + a_1 x_2 + x_1) (2)$ Din (1) și (2) deducem că legea de compoziție este asociativă.	0,5p 0,5p 1p
c)	Găsirea a două perechi și demonstrarea relației Ex. $(1,5) \circ (2,1) = (1 \cdot 2, 1 \cdot 1 + 5) = (2,6) , (1)$ $(2,1) \circ (1,5) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 5 + 1) = (2,11) , (2)$ Din (1) și (2) rezultă $(1,5) \circ (2,1) \neq (2,1) \circ (1,5)$	2p
d)	$x, y \in (0, +\infty)$ $(x, y^2) \circ (y, x) = (xy, x^2 + y^2)$ Ecuția devine $(xy, x^2 + y^2) = (6, 13) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ Sistemul simetric are soluțiile $(x, y) \in \{(2,3), (3,2), (-2,-3), (-3,-2)\}$ Având în vedere condițiile soluția ecuației este $(x, y) \in \{(2,3), (3,2)\}$	0,5p 0,5p 0,5p 1p 0,5p
2.)	Din oficiu	1p
	f este morfism, dacă $f(e_+) = e \Rightarrow f(0) = 1, f$ este izomorfism dacă f este și bijectivă.	2p
	$e^{\sqrt{\alpha^2-11}-\sqrt{\alpha^2-20}-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2-11} - \sqrt{\alpha^2-20} - 1 = 0$	2p
	$\alpha^2 - 20 = t \Rightarrow \sqrt{t+9} - \sqrt{t} = 1$	3p
	$t = 16 \Rightarrow \alpha = \pm 6, \alpha \geq 5 \Rightarrow \alpha = 6$	2p
3.)	Din oficiu	1p
a)	f este o primitivă a funcției $h_{p,q} \Leftrightarrow f$ este derivabilă și $f'(x) = h_{p,q}(x)$ f este derivabilă ca suma funcțiilor elementare, $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = p \cdot x + \frac{q}{\sqrt{x}} \Rightarrow p = 2, q = \frac{1}{2}$	1p 1p 1p
b)	F primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x), f(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$ strict crescătoare, cum $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Rightarrow F(\sqrt{2}) < F(\sqrt[3]{3})$	2p 1p

c)	$\int f(x^2 + 2x + 1) dx = \int \left[(x^2 + 2x + 1)^2 + \sqrt{(x+1)^2} \right] dx = \int \left[(x^2 + 2x + 1)^2 + x+1 \right] dx \stackrel{x>0}{=} \\ = \int (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2) dx = \frac{x^5}{5} + x^4 + 2x^3 + 5\frac{x^2}{2} + 2x + C$	2p 1p
4.)	Din oficiu	1p
a)	$F(x) = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' \ln x dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \\ = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx \right) = \\ = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C$	2p 2p 1p
b)	$G(x) = \int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+10)(6x^2+17x+12)+2018} dx = \\ = \int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+11-1)(6x^2+17x+11+1)+2018} dx = \int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+11)^2+2017} dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2017}} \operatorname{arctg} \frac{6x^2+17x+11}{\sqrt{2017}} + C.$	1p 1p 2p