

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 1.02.2020
Clasa a XI-a

1. (7p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x + |x-1|e^{nx}}{1+e^{nx}}$. Determinați mulțimea punctelor $x_0 \in \mathbb{R}$ în care funcția f are limită.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ și $M(A) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X \cdot A = A \cdot X\}$. Demonstrați că :

a) (3p) $\forall X \in M(A), \exists a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = a \cdot I_3 + b \cdot A + c \cdot A^2$.

b) (4p) $\forall X, Y \in M(A), X \cdot Y = Y \cdot X$.

3. Demonstrați că :

a) (2p) $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{R}), \det(X+Y) + \det(X-Y) = 2(\det X + \det Y)$.

b) (5p) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(AB - BA)^n = (AB - BA)^{n+1}$, atunci $\det(AB + BA) = 4 \det A \cdot \det B$.

4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați limitele:

a) (5p) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) (2p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
 Timp efectiv de lucru: 3 ore.