

Barem clasa a XII-a

1. a) Asociativitate

Dacă $a > 0, b > 0, (a \circ b) \circ c = abc = a \circ (b \circ c)$

Dacă $a < 0, b > 0, (a \circ b) \circ c = \frac{a}{b} \circ c = \frac{a}{bc}$ iar $a \circ (b \circ c) = a \circ (bc) = \frac{a}{bc} = (a \circ b) \circ c$

Dacă $a > 0, b < 0, (a \circ b) \circ c = ab \circ c = \frac{ab}{c}$, iar $a \circ (b \circ c) = a \circ \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c} = (a \circ b) \circ c$

Dacă $a < 0, b < 0, a \circ (b \circ c) = a \circ \frac{b}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$ iar

$(a \circ b) \circ c = \frac{a}{b} \circ c = \frac{ac}{b} = a \circ (b \circ c)$ deci legea este asociativă2p

Element neutru: $a \circ e = a$, dacă $a > 0 \Rightarrow ae = a$, deci $e = 1$, dacă $a < 0, \frac{a}{e} = a$

și $e = 1$. Se verifică $1 \circ a = a$, deci $a \circ 1 = 1 \circ a = a$ și $e = 1$ element neutru ..1p

Element simetrizabil

Se verifică $a' = \begin{cases} a & a < 0 \\ \frac{1}{a} & a > 0 \end{cases}$ 1p

Deci $(R^*, \circ)$ este grup.

b) $a \circ x \circ a = b \Rightarrow x = a' \circ b \circ a'$

Dacă $a > 0$ atunci $x = \frac{1}{a} \circ b \circ \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \circ \frac{1}{a} = \begin{cases} b & \text{dacă } b < 0 \\ \frac{b}{a^2} & \text{dacă } b > 0 \end{cases}$ 1p

Dacă $a < 0$ atunci $x = a \circ b \circ a = \frac{a}{b} \circ a = \begin{cases} \frac{a^2}{b} & \text{dacă } b < 0 \\ \frac{1}{b} & \text{dacă } b > 0 \end{cases}$ 1p

2.a)

$(f_a \circ f_b)(x) = f_a\left(\frac{x+b}{bx+1}\right) = \frac{(1+ab)x+a+b}{(a+b)x+1+ab} = \frac{x+\frac{a+b}{1+ab}}{\frac{a+b}{1+ab}x+1} = f_{\frac{a+b}{1+ab}}(x), a, b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{1+ab} \geq 0$,

deci $f_{\frac{a+b}{1+ab}} \in M$ 3p

b) Din calculul de la a) rezultă comutativitatea, iar compunerea funcțiilor este asociativă, elementul neutru este f_0 , deci $(M, \circ)$ monoid comutativ2p

Dacă $f_a \circ f_{a'} = f_0 \Rightarrow \frac{a+a'}{1+aa'} = 0, a + a' = 0$. Dar $a, a' \geq 0$, deci $a = a' = 0$ și f_0 este singurul element simetrizabil.2p

- 3, Pentru $x=0$ se obține că $F(0) = f(0) \dots\dots\dots 1p$
 Pentru $x \rightarrow [x]$ se obține că $F([x]) = f([x]) + [x], \quad \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$
 Pentru $x \rightarrow \{x\}$ se obține că $F(\{x\}) = f(\{x\}) + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$
 Înlocuind în relația dată în enunț se obține că $F(x) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$
 Prin înmulțire cu e^{-x} această relație se aduce la forma:
 $(e^{-x}F(x))' = -xe^{-x}, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$

Integrând prin părți funcția $h(x) = -xe^{-x}$, se obține că
 $e^{-x}F(x) = (x + 1)e^{-x} + C, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots$
 Așadar $F(x) = (x + 1) + Ce^x, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = 1 + Ce^x, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

4. Cu notația $\sqrt{e^t - 1} = y$ va rezulta $\int_{\sqrt{e^x - 1}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{y^2 + 1} dy = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 3p$

apoi $2 \arctg \sqrt{e^x - 1} = \frac{\pi}{3}$ și $\sqrt{e^x - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}, e^x = \frac{4}{3} \dots\dots\dots 3p$

$x = \ln \frac{4}{3} \dots\dots\dots 1p$