

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 6 martie 2022

CLASA a IX-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Scrisă ca interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| = x + 2\}$ este:

- A
- $(-\infty, -2)$
- B
- $[-2, \infty)$
- C
- $[-2, 2]$
- D
- $(-\infty, -2]$
- E
- $(-2, \infty)$

2. Produsul soluțiilor ecuației $x^2 - 2|x| = 3$ este:

- A 3 B -3 C -1 D 9 E -9

3. Suma tuturor numerelor reale x care au partea întreagă egală cu partea fracționară este egală cu:

- A -3 B -2 C -1 D 0 E 1

4. Numerele $a + \sqrt{3}$ și $a\sqrt{3}$, unde $a \in \mathbb{R}$, sunt raționale. Numărul $a^2 + 3$ este egal cu:

- A 9 B 6 C
- $3 + \sqrt{3}$
- D
- $3 - \sqrt{3}$
- E 0

5. Pătratul $ABCD$ are latura de lungime 4. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ este:

- A
- $4\sqrt{5}$
- B
- $4\sqrt{2}$
- C
- $4 + 4\sqrt{2}$
- D
- $2\sqrt{21}$
- E 12

6. Se consideră triunghiul ABC și punctul M astfel încât $7\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}$. Valoarea raportului $\frac{BM}{MC}$ este egală cu:

- A
- $\frac{2}{7}$
- B
- $\frac{5}{7}$
- C
- $\frac{10}{7}$
- D 2,5 E 0,4

7. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar a și b două numere reale astfel încât $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$. Numărul $b - 2a$ este egal cu:

- A -3 B -1 C 0 D 1 E 3

8. Fie $ABCD$ un paralelogram și M un punct din plan. Relația $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ este adevărată dacă și numai dacă:

- A
- M
- este mijlocul laturii
- AB
- B
- M
- este mijlocul laturii
- AD
- C
- M
- este centrul lui
- $ABCD$
-
- D
- $M \in AB$
- E
- M
- este un punct oarecare din plan

9. Numărul perechilor $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $ab = a + b = a^2 - b^2$ este:

- A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

10. Un număr natural n are 5 divizori naturali. Numărul divizorilor naturali ai numărului n^2 este:

- A 5 B 7 C 9 D 10 E 25

11. Fie n cel mai mic număr natural de două cifre cu proprietatea că inversul său se scrie în formă zecimală ca fracție periodică mixtă având exact două cifre în perioadă și o cifră între virgulă și perioadă. Suma cifrelor numărului n este:

- A 2 B 3 C 4 D 6 E 9

12. Fie x și y două numere reale astfel încât $6x + 2y = 3$. Valoarea minimă posibilă a numărului $S = x^2 + y^2$ este:

- A
- $\frac{9}{40}$
- B
- $\frac{1}{5}$
- C
- $\frac{1}{6}$
- D
- $\frac{2}{9}$
- E
- $\frac{3}{16}$

13. Se consideră numărul $A = \sqrt{2022 + \sqrt{2022 + \dots + \sqrt{2022}}}$, numărul radicalilor fiind 2022. Partea întreagă a numărului A este:

A 44 **B** 45 **C** 46 **D** 47 **E** 48

14. Afirmăția: *Suprafața unui pătrat se poate împărți, cu ajutorul unor segmente paralele cu laturile sale, în n pătrate mai mici* este adevărată pentru orice număr natural $n \geq n_0$. Cea mai mică valoare a numărului natural n_0 este:

A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 4)$, $B(7, 0)$ și $C(-1, -8)$. Fie D piciorul bisectoarei din A în triunghiul ABC . Suma dintre abscisa și ordonata punctului D este:

A $\frac{11}{5}$ **B** $\frac{36}{17}$ **C** 2 **D** $\frac{32}{17}$ **E** $\frac{23}{9}$

16. Notăm cu M, N și P mijloacele laturilor BC, CA , respectiv AB ale triunghiului ABC . Punctele H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor ABC , respectiv MNP . Dintre următoarele egalități, cea care este adevărată pentru orice triunghi ABC este:

A $\overrightarrow{H'H} = \overrightarrow{H'A} + \overrightarrow{H'B} + \overrightarrow{H'C}$ **B** $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ **C** $\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$
D $\overrightarrow{H'H} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ **E** $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{H'A} + \overrightarrow{H'B} + \overrightarrow{H'C}$

17. Numărul perechilor de numere întregi (x, y) având proprietatea că $(xy - 3)^2 = x^2 + y^2$ este:
A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 8

18. Fie a, b, c numere reale pozitive cu suma 3. Considerăm numerele $A = \sum a \left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \right)$, $B = \frac{18}{\sum a^5}$ și $C = 2 \sum \frac{1}{a^3}$ (sumările sunt ciclice). Ordinea crescătoare a numerelor A, B și C este:

A A, B, C **B** A, C, B **C** B, A, C **D** B, C, A **E** C, B, A

19. Numărul de elemente ale mulțimii $A = \left\{ x = \frac{n^2 + 3}{n^2 + n} \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 50 \right\}$ este egal cu:
A 46 **B** 47 **C** 48 **D** 49 **E** 50

20. Se consideră mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \cdot [2x] \cdot [3x] \cdot [4x] = 10x\}.$$

Numărul de elemente ale mulțimii A este:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** cel puțin egal cu 5

21. Valoarea sumei $S = \left\lfloor \frac{2}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{7} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{100}}{7} \right\rfloor$ este:

A $\frac{2^{101} - 249}{7}$ **B** $\frac{2^{100} + 252}{7}$ **C** $\frac{2^{101} - 235}{7}$ **D** $\frac{2^{100} + 256}{7}$ **E** $\frac{2^{102} - 245}{7}$

Problemele **22-23** se referă la următorul enunț.

Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC , iar D un punct situat pe latura AB astfel încât $AD = 3DB$.

22. Notăm cu P intersecția dreptelor AM și CD și cu Q intersecția dreptelor AC și BP . Valoarea raportului $\frac{AQ}{AC}$ este egală cu:

A 0,5 **B** 0,6 **C** 0, (6) **D** 0,75 **E** 0,8

23. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Notăm cu E intersecția dreptelor AC și DG . Valoarea raportului $\frac{AE}{AC}$ este egală cu:

A 0,5 **B** 0,6 **C** 0, (6) **D** 0,75 **E** 0,8

24. Dacă x este lungimea laturii unui pătrat care are vârfurile pe laturile unui triunghi cu lungimile 3, 4 și 5, atunci mulțimea valorilor lui x este:

A $\left\{\frac{12}{7}, 3\right\}$

B $\left\{\frac{60}{37}, \frac{12}{7}\right\}$

C $\left\{\frac{60}{37}, \frac{12}{7}, 3\right\}$

D $\emptyset$

E $\{3\}$