

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VIII-A

SUBIECTUL 1

Fie $E(x) = 16x^2 - 32x + 25$, $x \in \mathbf{R}$.

- a) Dacă $m = (\sqrt{3} + 1)^2 - \sqrt{3} - 3$, arătați că $E(m) \in \mathbf{Z}$;
 b) Dacă $a \in \mathbf{Z}$, scrieți numărul $E(a)$ ca o sumă de două pătrate;
 c) Pentru $x \in \mathbf{N}$ determinați valoarea maximă a expresiei $F(x) = 10 - E(x)$.

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- | | | |
|----|--|----------|
| a) | $m = \sqrt{3} + 1$ | 1p |
| | $E(m) = 57 \in \mathbf{Z}$ | 1p |
| b) | $E(a) = 16(a - 1)^2 + 9$ | 1p |
| | Finalizare $E(a) = [4(a - 1)]^2 + 3^2$ | 1p |
| c) | $F(x) = 1 - [4(x - 1)]^2 \leq 1, x \in \mathbf{R}$ | 1p |
| | $\max F(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ | 1p |
| | Finalizare $\max F(x) = 1$, pentru $x = 1 \in \mathbf{N}$ | 1p |

SUBIECTUL 2

- a) Arătați că pentru oricare numere reale $x, y, z > 0$ este adevărată relația $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz}$.
- b) Demonstrați că $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$, oricare ar fi numerele reale $x, y, z > 0$.

G.M. 10/2018, Laura Molea, Curtea de Argeș

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- a) $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow (x\sqrt{y})^2 - 2x\sqrt{yz} + \sqrt{z}^2 \geq 0$ 1p
- Finalizare $(x\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geq 0$ (A) 1p
- b) Din a) $\Rightarrow \frac{x}{x^2y+z} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}}$ si analoagele 1p
- Adunând relațiile se obține $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}}\right)$ 1p
- Notăm $\frac{1}{\sqrt{x}} = a > 0$, $\frac{1}{\sqrt{y}} = b > 0$, $\frac{1}{\sqrt{z}} = c > 0$
- Demo
- nstrăm că $bc + ac + ab \leq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ 1p
- $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ (A) 1p
- Finalizare: $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right), \forall x, y, z > 0$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2019
CLASA A VIII-A

SUBIECTUL 3

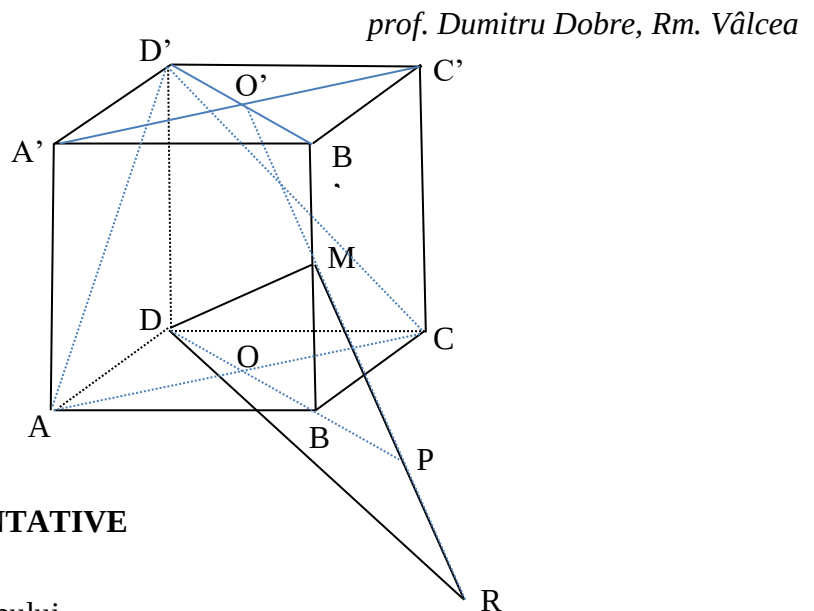
Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Fie O și O' centrele fețelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$, iar M mijlocul muchiei BB' .

a) Determinați aria triunghiului ACD' dacă $\triangle OBM$ are perimetrul egal cu

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2}$$

b) Arătați că $D'M \perp AO$.

c) Fie $(ABC) \cap O'M = \{P\}$ și R simetricul lui M față de punctul P . Arătați că B este centrul de greutate al triunghiului DMR .



SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

a) Fie a lungimea laturii cubului

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}$$

..... 1p

$$\text{Finalizare } A_{ACD} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

..... 1p

b) $AO \perp (BDD'B')$

..... 1p

Finalizare: $D'M \perp AO$

..... 1p

c) $P \in BD$, cu $BP = O'B'$

..... 1p

În triunghiul DMR , $[DP]$ mediană

..... 1p

Finalizare: $BP = \frac{1}{3}DP \Rightarrow B$ este centrul de greutate al triunghiului DMR

..... 1p

SUBIECTUL 4

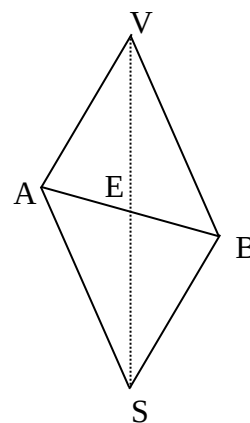
Fie piramida triunghiulară $VABC$ având lungimile muchiilor laterale $VA = a$, $VB = b$ și $VC = c$.

Fie E mijlocul lui $[AB]$ și O centrul de greutate al bazei ABC a piramidei.

- Arătați că $VE < \frac{a+b}{2}$.
- Arătați că $VO < \frac{a+b+c}{3}$.
- Dacă $a = b = c$ și $m(\angle(VB, AC)) = 60^\circ$ arătați că $\frac{AB^2 - BC^2}{AC} = a$.

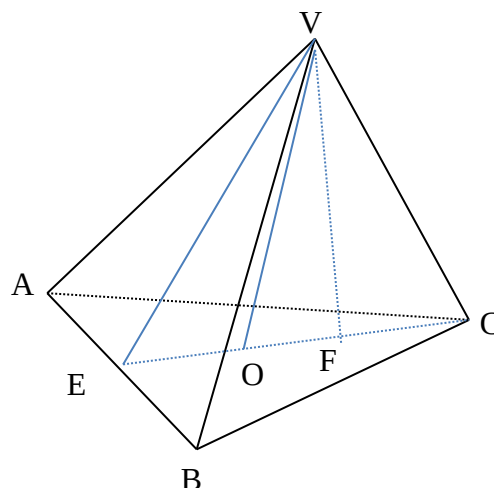
prof. Elena Drăgan, Rm. Vâlcea

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE



- Fie S simetricul lui V față de $E \Rightarrow VASB$ paralelogram
Din inegalitatea triunghiului aplicată pentru $\triangle VAS \Rightarrow VS < VA + AS$
Finalizare: $VE < \frac{a+b}{2}$

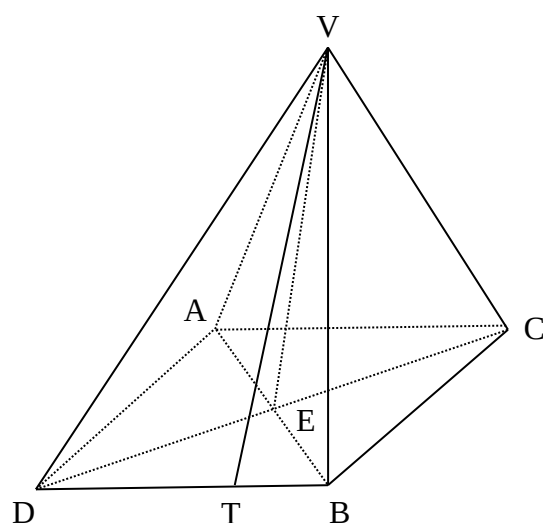
..... 1p



- Fie F mijlocul lui $[OC]$.
Folosim relația de la **a)** pentru medianele:
 VE în triunghiul VAB : $VE < \frac{a+b}{2}$
 VO în triunghiul VOE : $VO < \frac{VE+VF}{2}$
 VF în triunghiul VOC : $VF < \frac{VO+c}{2}$
 $VO < \frac{1}{2}(VE + VF) < \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{VO+c}{2}\right) \Rightarrow 4VO < a+b+c$
Finalizare: $VO < \frac{a+b+c}{3}$

..... 1p

..... 1p



c) Construim paralelogramul $ACBD$ de centru E .

$[VE]$ mediană în $\triangle VAB$ isoscel $\Rightarrow [VE]$ înălțime $\Rightarrow$

$$VE^2 = VA^2 - \frac{AB^2}{4} \quad (1)$$

$$[VE] \text{ mediană în } \triangle VDC \Rightarrow VE^2 = \frac{2VD^2 + 2VC^2 - DC^2}{4} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow 4VA^2 - AB^2 = 2VD^2 + 2VC^2 - DC^2 \Rightarrow VD^2 = \frac{2VA^2 - AB^2 + DC^2}{2} \quad (3) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$DB \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(AC, VB) = \sphericalangle(DB, VB) = \sphericalangle VBD$$

Construim $VT \perp BD$.

$$\text{În } \triangle VBD, \text{ cu } m(\sphericalangle(VBD)) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle(TVB)) = 30^\circ \Rightarrow TB = \frac{VB}{2}$$

$$\text{Se obțin relațiile: } VT^2 = VB^2 - \frac{VB^2}{4} = \frac{3VB^2}{4} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$VD^2 = \frac{3VB^2}{4} + TD^2 = \frac{3VB^2}{4} + \left(DB - \frac{VB}{2} \right)^2 = VB^2 + DB^2 - DB \cdot VB =$$

$$= VA^2 + AC^2 - AC \cdot VA \quad (4)$$

$$\text{Din (3) și (4) se obține } DC^2 - AB^2 = 2AC^2 - 2AC \cdot VA \quad (5) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Aplicând teorema medianei în } \triangle CAB \text{ obținem: } EC^2 = \frac{2CA^2 + 2CB^2 - AB^2}{4} \Rightarrow$$

$$DC^2 = 4EC^2 = 2CA^2 + 2CB^2 - AB^2 \quad (6)$$

$$\text{Din (5) și (6)} \Rightarrow 2CA^2 + 2CB^2 - AB^2 - AB^2 = 2AC^2 - 2AC \cdot VA \Rightarrow \frac{AB^2 - BC^2}{AC} = a \quad \dots\dots\dots 1p$$