OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

Barem de corectare,

clasa a VIII-a

Subiectul I

1. Fie $x = \sqrt{47-\sqrt{2013}}-\sqrt{47+\sqrt{2013}}$. Calculaţi x^2 şi partea întreagă a numărului x.

2. Dacă numărul real pozitiv x verifică egalitatea $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ să se arate că numărul $a = x^{-4}+x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}+x^{1}+x^{2}+x^{3}+x^{4}$ este natural.

Soluţie

1. $x^2 = 66$ 1p

x este negativ deoarece $\sqrt{47-\sqrt{2013}}<\sqrt{47+\sqrt{2013}} \Rightarrow x = -\sqrt{66}$ 1p

partea întreagă a lui x este -9 .... 1p

2. prin ridicarea egalităţii la pătrat obţinem $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ 1p

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=49 \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=47$ 1p

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm 3$ şi cum x este pozitiv $x+\frac{1}{x}=3$ 1p

$x^3+\frac{1}{x^3}=18$, finalizare a = 75 este număr natural 1p

Subiectul II

a) Fie a şi b două numere reale pozitive. Arătaţi că $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

b) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Soluţie

a) Relaţia din enunţ este echivalentă cu $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geq 0$ 1p

$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ 1p

finalizare 1p

b) În relaţia de la **a)** egalitatea are loc dacă $a = b$.

Pentru $a \neq b$ avem $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ 1p

$\frac{1}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}<\frac{1}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$ şi aplicarea ei pentru termenii sumei 1p

finalizare 2p

Subiectul III

În tetraedrul oarecare $ABCD$, G_1, G_2 şi G_3 sunt centrele de greutate ale feţelor ABC, ABD şi, respectiv, ACD.

a) Demonstraţi că $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

b) Aflaţi valoarea raportului ariilor triunghiurilor $\Delta\, G_1G_2G_3$ şi $\Delta\, BCD$.

Soluţie:

a) Fie M mijlocul (AB).

$G_1 \in (CM)$, $G_2 \in (DM)$ şi $\dfrac{MG_1}{MC} = \dfrac{MG_2}{MD} = \dfrac{1}{3}$ 1p

din teorema reciprocă a teoremei lui Thales obţinem $G_1G_2 \parallel CD$ 1p

$G_1G_2 \parallel (BCD)$, analog $G_2G_3 \parallel (BCD)$ 1p

$(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$ 1p

b) Din teorema fundamentală a asemănării obţinem $\dfrac{G_1G_2}{CD} = \dfrac{1}{3}$ 1p

triunghiurile $\Delta\, G_1G_2G_3$ şi $\Delta\, BCD$ sunt asemenea cu raportul de asemănare $\dfrac{1}{3}$ 1p

raportului ariilor triunghiurilor $\Delta\, G_1G_2G_3$ şi $\Delta\, BCD$ este $\dfrac{1}{9}$ 1p

Subiectul IV

Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu bazele pătrate, în care $AA' = AB\sqrt{2}$ şi M, N sunt, respectiv, mijloacele segmentelor $[BB']$, $[DD']$.

a) Arătaţi că $A'B \perp (AMD)$;

b) Arătaţi că dreapta de intersecţie a planelor (AMD) şi (ANB) este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

Soluţie:

a) $AD \perp A'B$ 1p

Fie $A'B \cap AM = \{E\}$

$\Delta ABM \sim \Delta A'AB$ (LUL) $\Rightarrow \angle BAM \equiv \angle AA'B$ şi cum $\angle A'BA$ şi $\angle BA'A$ sunt complementare se obţine $m(\angle AEB) = 90^{\circ}$, deci $AM \perp A'B$ 2p

$A'B \perp (AMD)$ 1p

b) Planele (AMD) şi (ANB) au punctul A comun şi sunt diferite, deci există dreapta d de intersecţie a lor

$A'B \perp (AMD)$ şi $d \subset (AMD)$, deci $A'B \perp d$ 1p

Analog cu demonstraţia de la **a)** avem $A'D \perp (ANB)$ şi deci $A'D \perp d$ 1p

Finalizare 1p