

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

8 februarie 2025

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie G un grup cu proprietatea că $xy^5 = y^5x$ și $xy^7 = y^7x$, oricare ar fi $x, y \in G$.
Demonstrați că grupul G este abelian.

Subiectul 2. Determinați grupul $(G, \circ)$, știind că funcția $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow G$, $f(x) = 2x + 1$ este izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, \circ)$.

Subiectul 3. Calculați:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \cos^2 x}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

Subiectul 4. Demonstrați că:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \cdot \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx < \frac{1}{2}.$$

Cristinel Mortici

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.