

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL I

Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3$

G.M.-B Nr. 5/2018

Soluție:

Relatia dintre media aritmetică și cea geometrică

conduce la $\frac{\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3}{3} \geq \sqrt[3]{\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 3}$ (1).....2p

de altă parte $\log_3 5 = \log_7 5 \log_3 7$. În aceste condiții relația (1) devine

$\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 \geq 3$ (2)1p

Din inegalitățile $5 < 3\sqrt{3}$ și $7 < 5\sqrt{5}$

se obține $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 < 4 \Leftrightarrow \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 < 4$ (3)3p

din (2) și (3) $[\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3] = 3$ 1p

SUBIECTUL II

Fie $f: [3; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}$.

- a) Studiați injectivitatea funcției f
- b) Determinați $\text{Im}f$.

Soluție:

- a) Prin amplificare, $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}}$.

Cum funcția $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ este strict crescătoare $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{g(x)}$ este strict descrescătoare, deci injectivă.3p

- b) Arătăm mai întâi ca $0 < f(x) \leq 2$. $f(x) > 0$ evident.
 $f(x)$ descrescătoare, $\Rightarrow f(x) \leq f(3) = 2 \Rightarrow \text{Im}f \subset (0, 2]$ (1)2p

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = y$ conduce la $\sqrt{x-3} = \frac{4-y^2}{2y}$. Evident, pentru $y \in (0, 2]$ ecuația are soluții în intervalul $[3, +\infty)$, adică $(0, 2] \subset \text{Im}f$ (2)2p

(1),(2) $\Rightarrow \text{Im}f = (0, 2]$

SUBIECTUL III

a) Sa se rezolve ecuatia: $3^{x^2+x} + x^2 - x = 3^{2x}$

b) Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ si $b \in (0, \infty)$. Determinati a, b daca:

$$3^{\log_a^2 b - \log_a b} + \frac{\log_a^2 b - \log_a b}{3^{\log_a b^2}} = 1$$

Prof. Adrian Bălăşel, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) Soluția 1

Ecuatia este echivalentă cu $3^{x^2+x} + x^2 + x = 3^{2x} + 2x$ 1p

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + x$ este strict crescătoare, deci injectivă.....2p

Din $f(x^2 + x) = f(2x) \xrightarrow{f \text{ injectivă}} x^2 + x = 2x \Rightarrow x = 0, x = 1$ 1p

Soluția 2:

Ecuatia este echivalentă cu : $3^{x^2-x} + \frac{x^2 - x}{3^{2x}} = 1$ 1p

Daca $x^2 - x > 0 \Rightarrow 3^{x^2-x} > 1$; $\frac{x^2 - x}{3^{2x}} > 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții 1p

Analog, daca $x^2 - x < 0$, ecuația nu are soluții1p

Deci $x^2 - x = 0 \Rightarrow x=0$ sau $x=1$1p

b) Pentru $x = \log_a b$ se obține ecuația dată.....1p

Conform a) se obține $\log_a b = 0 \Rightarrow b=1$ si $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ 1p

sau $\log_a b = 1 \Rightarrow a = b$ cu $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, $b \neq 1$1p

SUBIECTUL IV

Fie $f: I \rightarrow J$, $f(x) = a \sin x + b \cos x$, $a, b > 0$

a) Determinati I si J astfel incat f sa fie bijectiva si I de lungime maxima .

b) Pentru ce valoare a raportului $\frac{a}{b}$, $\left\{ x \in [0; 2\pi] \mid f(x) \geq \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \right\} = \left\{ 0; \frac{2\pi}{3} \right\}$?

Prof. Valerică Rașcu, Rm. Vâlcea

Soluție

a) Fie $\alpha = \arctg \frac{b}{a} \Rightarrow f(x) = a \left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x \right) = a(\sin x + \operatorname{tg} \alpha \cos x) = \frac{a}{\cos \alpha} \sin(x + \alpha) \dots 2p$

Dar $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, ($a > 0$) $\Rightarrow f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$

Cum funcția $g(x) = \sin x$ are ca restricție bijectivă $\tilde{g}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1; 1] \Rightarrow$

$I = \left[-\frac{\pi}{2} - \alpha; \frac{\pi}{2} - \alpha \right]$ si $J = [-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$ 2p

b) Evident , inecuația dată este echivalentă cu $\sin(x + \alpha) \geq \frac{1}{2}$ (1)1p

Cum inecuația $\sin x \geq \frac{1}{2}$ are solutia $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ obținem că cerința problemei se realizează

pentru $\alpha = \frac{\pi}{6}$, adica $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$2p