

Clasa a V - a

Problema 1.

La începutul orei de matematică fiecare elev primește 10 jetoane¹ și un bilet pe care este scris un număr natural nenul. Pe fiecare jeton este scris unul din numerele 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 și nu există mai multe jetoane care să conțină același număr. Fiecare elev trebuie să aleagă dintre jetoanele sale pe cele care au proprietatea că suma numerelor scrise pe ele coincide cu numărul scris pe bilet.

- a) Care este cel mai mare număr care poate fi scris pe bilet astfel încât problema să aibă soluție ?
b) Pe biletul lui Dan scrie numărul 1000. Stabilește care sunt jetoanele pe care trebuie să le aleagă Dan.
c) Ana afirmă că pentru numărul scris pe biletul primit, număr care este mai mic decât numărul determinat la punctul a), îi este imposibil să găsească printre jetoanele ei, unele, care au proprietatea că suma numerelor scrise pe ele coincide cu numărul scris pe bilet. Este adevărată afirmația făcută de Ana?

Nota¹: Jetonul este o piesă plată care reprezintă o anumită valoare sau un număr de ordine.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: a) Numărul este $1+2+4+\dots+512=1023$. b) $1000=512+256+128+64+32+8$; c) i) Pentru că 1, 2, 4 și 8 sunt scrise pe jetoane iar $3=1+2$, $5=1+4$, $6=2+4$, $7=1+2+4$ rezultă că numărul scris pe biletul Anei nu este 1, 2, 3..., 8. ii) Orice număr mai mare decât 8 și mai mic decât 16 este egal cu suma dintre 8 și unul din numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și, ținând cont de i) nici printre ele nu se găsește numărul scris pe biletul Anei. iii) Orice număr mai mare decât 16 și mai mic decât 32 este egal cu suma dintre 16 și unul din numerele 1, 2, ..., 15 și, ținând cont de ii) nici printre ele nu se găsește numărul scris pe biletul Anei. Același raționament este valabil și pentru iv) numerele mai mari decât 32 și mai mici decât 64, v) numerele mai mari decât 64 și mai mici decât 128, vi) numerele mai mari decât 128 și mai mici decât 256 și vii) numerele mai mari decât 256 și mai mici decât 512. În concluzie, afirmația Anei este falsă.

Problema 2.

În vremuri străvechi și de mult apuse, Lordul Roland, aflat în război cu vecinul său, Lordul Archibald a fost atacat de acesta. În mare grabă Roland a scos din tezaur 100 000 monezi de aur ca să plătească o armată formată din diferite grupuri de războinici. Astfel grupul sulitașilor număra 100, arcașii erau de două ori mai mulți sulitașii, cavalerii, în număr egal cu îngerii erau de două ori mai puțini decât sulitașii, și în plus a mai chemat 60 de grifoni (creaturi fioroase înaripate). Banii scoși i-au ajuns să plătească această armată și nu i-a mai rămas niciun galben. Toți războinicii dintr-un grup au primit același număr natural de monede. Dacă se împarte numărul monedelor primite de fiecare sulitaș la 2, de fiecare arcaș la 3, de fiecare grifon 5, de fiecare cavalier 7 și de fiecare înger la 11 se obține de fiecare dată același cât și restul 0.

- a) Câți războinici numără armata lui Roland?
b) Câte monezi de aur a primit fiecare grup de războinici?

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: a) 460; b) Dacă c este câtul indicat în enunț atunci suma primită de sulitași este egală cu $100 \cdot (2 \cdot c) = 200 \cdot c$, suma primită de arcași este egală cu $200 \cdot (3 \cdot c) = 600 \cdot c$, suma primită de grifoni este egală cu $60 \cdot (5 \cdot c) = 300 \cdot c$, suma primită de cavaleri este egală cu $50 \cdot (7 \cdot c) = 350 \cdot c$ și suma primită de îngeri este egală cu $50 \cdot (11 \cdot c) = 550 \cdot c$.

Rezultă $200 \cdot c + 600 \cdot c + 300 \cdot c + 350 \cdot c + 550 \cdot c = 100\ 000 \Rightarrow c = 50$ și suma primite de fiecare sulitaș, arcaș, grifon, cavalier și înger este 100, 150, 250, 350 respectiv 550.

Suma primită de fiecare grup de războinici sulitași, arcași, grifoni, cavaleri și îngeri este: 10000 monezi, 30000 monezi, 15000 monezi, 17500 monezi, 27500 monezi.

Problema 3.

Numerele naturale nenule se scriu într-un tabel. Primele șase linii ale tabelului sunt completate ca în

linia 1				1			
---------	--	--	--	---	--	--	--

desenul alăturat și regula de completare se păstrează pentru toate liniile care se scriu.

a) Scrie pe foaia de concurs *linia* 10.

b) Precizează care este numărul scris la mijlocul *liniei* 24 (*justifică răspunsul*).

<i>linia</i> 2			2	3	4		
<i>linia</i> 3				5			
<i>linia</i> 4		6	7	8	9	10	
<i>linia</i> 5				11			
<i>linia</i> 6	12	13	14	15	16	17	18
⋮							

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: a) *linia* 10: 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40;

b) În stânga și în dreapta coloanei centrale avem câte $1+2+3+\dots+12=(1+12)\cdot 12:2=78$ numere. Sunt în total $2\cdot 78+24=180$ numere, deci ultimul număr care completează a *linia* 24 este 180. În *linia* 24 sunt scrise $12+1+12=25$ de numere. Deducem că numărul scris la mijlocul *liniei* 24 este numărul 168.

Problema 4.

Un număr natural se numește *voios* dacă:

- este mai mare decât 1000 și mai mic decât 10000;
- pentru scrierea lui nu se utilizează cifra zero și nu se folosește aceeași cifră de mai multe ori;

a) Calculează diferența dintre cel mai mare număr *voios* și cel mai mic număr *voios*.

b) Câte numere *voioase* se pot forma cu cifrele 1, 2, 3 și 4?

c) Demonstrează că nu există două numere *voioase*, formate cu aceleași cifre a, b, c și d a căror diferență să fie egală cu unul din numerele 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: a) $9876-1234=8642$; b) 24; c) Observăm că dacă $N=\overline{abcd}$ atunci $N-(a+b+c+d)=\overline{abcd}-(a+b+c+d)=999\cdot a+99\cdot b+9\cdot c$, de unde rezultă că $N-(a+b+c+d)$ este un număr divizibil cu 9. Presupunem că există N_1 și N_2 două numere *voioase* formate cu cifrele a, b, c și d , a căror diferență să fie egală cu unul din numerele 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024. Pentru că $N_1-N_2=[N_1-(a+b+c+d)]-[N_2-(a+b+c+d)]\Rightarrow N_1-N_2$ este divizibil cu 9, contradicție.

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 2 puncte, b) 2 puncte, c) 3 puncte; Problema 2. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 4. a) 2 puncte, b) 2 puncte, c) 3 puncte.

Clasa a VI - a

Problema 1.

În desenul alăturat este o grilă specifică jocului Sudoku. În exemplul dat grila jocului este un pătrat acoperit 4×4 pătrățele. Acestea pătrățele sunt grupate câte 4, prin marcajul cu linie groasă, în patru pătrate, numite regiuni. Regula jocului este simplă: fiecare rând, coloană sau regiune trebuie să conțină o singură dată cifrele 1, 2, 3, 4.

a) Ada a citit, în prima zi de vacanță 43 de pagini dintr-o carte, apoi în fiecare zi citește un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. După câte zile a citit Ada 301 de pagini?

Găsește numărul de zile necesar și scrie-l în pătrățelul C1 (C1 este pătratul situat în *linia* 1 și în *coloana* C).

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

b) Determină două numere raționale care au suma $\frac{13}{6}$ și diferența $\frac{5}{6}$. Completează căsuța A2 cu produsul celor două numere (A2 este pătratul situat în *linia* 2 și în *coloana* A).

c) Scrie numărul care reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor 28 și 52 în căsuța D3 (D3 este pătratul situat în *linia* 3 și în *coloana* D).

d) Scrie numărul care reprezintă $\frac{4}{3}$ din $\frac{3}{2}$ în căsuța B4 (B4 este pătratul situat în *linia* 4 și în *coloana* B).

e) Recitește regulile jocului și completează corespunzător celelalte 12 pătrățele.

Diana Stanciu, Oltenița

Soluție: a) 3; b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$; c) 4; d) 2;

e)

	A	B	C	D
1	2	4	3	1
2	1	3	4	2
3	3	1	2	4
4	4	2	1	3

Problema 2.

Se consideră numerele $A = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2018$ și $B = A \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018}\right)$.

- a) Arată că numărul $A + 5$ nu este un număr prim.
b) Găsește 2017 numere naturale consecutive, care nu sunt numere prime.
c) Arată că $B \in \mathbb{N}$.
d) Demonstrează că B este divizibil cu 2019.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: a) $A + 5 = 5(3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2018 + 1)$; b) numerele $A + 2, A + 3, A + 4, \dots, A + 2018$ satisfac cerințele; c) $B = A + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2018 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2018 + \dots + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2017 \in \mathbb{N}$;

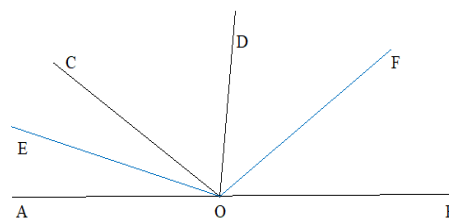
$$\begin{aligned} \text{d) } B &= A \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2018}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2017}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2016}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1009} + \frac{1}{1010}\right) \right] = \\ &= 2019 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2018} + \frac{1}{2 \cdot 2017} + \frac{1}{3 \cdot 2016} + \dots + \frac{1}{1009 \cdot 1010} \right) \Rightarrow 2019 | B \\ \text{pentru că } A \cdot \left(\frac{1}{2018} + \frac{1}{2 \cdot 2017} + \frac{1}{3 \cdot 2016} + \dots + \frac{1}{1009 \cdot 1010} \right) &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Problema 3.

În desenul alăturat punctele A, O, B sunt coliniare, semidreapta (OE) este bisectoarea $\angle AOC$, semidreapta (OF) este bisectoarea $\angle BOD$ și $m(\angle EOF) = 120^\circ$.

a) Determină $m(\angle COD)$.

b) Dacă M este un punct din interiorul $\angle BOD$, astfel încât $OM \perp OC$ și $m(\angle FOM) = 10^\circ$, atunci demonstrează că $m(\angle AOC) = 40^\circ$ sau $m(\angle AOC) = 80^\circ$.



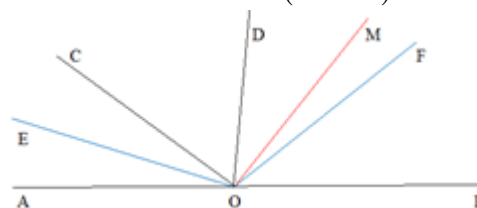
Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: a) Dacă $m(\angle AOC) = 2a$, $m(\angle COD) = 2b$ și $m(\angle BOD) = 2c$, atunci $2a + 2b + 2c = 180^\circ \Leftrightarrow a + b + c = 90^\circ$; $120^\circ = m(\angle EOF) = a + 2b + c = (a + b + c) + b = 90^\circ + b \Rightarrow b = 30^\circ \Rightarrow m(\angle COD) = 60^\circ$.

b) $m(\angle DOM) = m(\angle COM) - m(\angle COD) = 30^\circ$

Cazul 1.

Punctul M aparține interiorului $\angle DOF$.
 $m(\angle DOF) = 40^\circ \Rightarrow m(\angle BOD) = 80^\circ \Rightarrow m(\angle AOD) = 100^\circ \Rightarrow m(\angle AOC) = 40^\circ$.

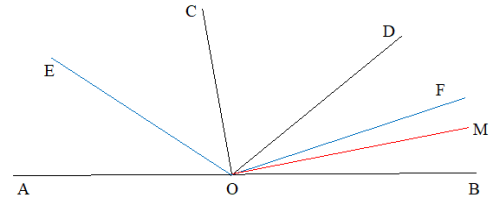


Cazul 2.

Punctul M aparține interiorului $\angle BOF$.

$$m(\angle DOF) = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ \Rightarrow m(\angle BOD) = 40^\circ \Rightarrow$$

$$m(\angle AOD) = 140^\circ \Rightarrow m(\angle AOC) = 80^\circ.$$



Problema 4.

Se consideră unghiul alungit $\angle AOB$ și, de aceeași parte a dreptei AB , semidreptele $[OX$ și $[OY$ astfel încât $[OX$ este inclusă în interiorul $\angle AOY$ și $m(\angle XOY)$ egală cu media aritmetică a $m(\angle AOX)$ și $m(\angle BOY)$.

a) Dacă știi că $m(\angle AOX)$ reprezintă 25% din $m(\angle BOY)$, atunci determină $m(\angle AOX)$ și $m(\angle BOY)$.

b) Dacă $C \in [OX$, $D \in [OY$ și triunghiul COD este isoscel cu baza latura $[CD]$, punctul M aparține bisectoarei $\angle AOX$, N aparține semidreptei opuse bisectoarei $\angle BOY$ și $OM = ON$, arătați că $CN = DM$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnovi

Soluție: a) Dacă $m(\angle AOX) = a$, $m(\angle XOY) = b$ și $m(\angle BOY) = c$,

$$\text{atunci } \begin{cases} 2b = a + c \\ 4a = c \\ a + b + c = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ b = 2,5a \\ 7,5a = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24^\circ \\ b = 60^\circ \\ c = 96^\circ \end{cases}$$

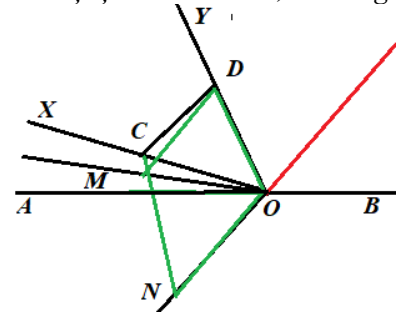
$$\text{b) } m(\angle MON) = \frac{1}{2}m(\angle AOX) + \frac{1}{2}m(\angle BOY) = 12^\circ + 48^\circ = 60^\circ \Rightarrow$$

$m(\angle MON) = m(\angle COD)$; din ipoteză $OC = OD$ și $OM = ON$, deci $\triangle CON \equiv \triangle DOM \Rightarrow CN = DM$.

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct, b) 1 punct, c) 1 punct, d) 1 punct, e) 3 puncte; Problema 2. a) 1 punct, b) 2 puncte, c) 1 punct, d) 3 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 4. a) 3 puncte, b) 4 puncte.



Clasa a VII - a

Problema 1.

a) Calculează aria unui pătrat care are lungimea laturii egală cu $\sqrt{5} m$.

b) Demonstrează că $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.

c) Determină toate numerele reale pozitive cu proprietatea $x \cdot [x] = 5$ (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x)

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: a) $5 m^2$; b) $4,84 < 5 < 5,29 \Leftrightarrow (2,2)^2 < (\sqrt{5})^2 < (2,3)^2 \Leftrightarrow 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$; c) $[x] \leq x$ și $x \geq 0 \Rightarrow x \cdot [x] \leq x^2 \Rightarrow 5 \leq x^2 \Rightarrow \sqrt{5} \leq x \Rightarrow 2,2 \leq x$ (1); Presupunem că $x \geq 3 \Rightarrow [x] \geq 3$, cele două relații implică $x \cdot [x] \geq 9 \Rightarrow 5 \geq 9$, fals, rezultă $x < 3$ (2). Din (1) și (2) rezultă $[x] = 2 \Rightarrow x \cdot [x] = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Problema 2.

a) Arată că $4(x - y)^2 = 9xy$ dacă și numai dacă $(4x - y)(4y - x) = 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrează că dacă x și y sunt numere raționale pozitive cu proprietatea $4(x - y)^2 = 9xy$, atunci

$$y = 4x \text{ sau } \sqrt{\frac{12x+y}{4x+9y}} \in \mathbb{Q}.$$

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: a) $(4x - y)(4y - x) = 16xy - 4x^2 - 4y^2 + xy = -(4x^2 - 17xy + 4y^2);$

$$4(x - y)^2 = 9xy \Leftrightarrow 4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow -(4x^2 - 17xy + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow (4x - y)(4y - x) = 0.$$

b) Din punctul **a)** $4(x - y)^2 = 9xy \Leftrightarrow y = 4x$ sau $x = 4y$. Dacă $x = 4y \Rightarrow \sqrt{\frac{12x+y}{4x+9y}} = \sqrt{\frac{49y}{25y}} = \frac{7}{5} \in \mathbb{Q}$

Problema 3.

Se consideră trapezul $ABCD$, dacă $AB \parallel CD$, $AB = 9 \text{ cm}$, $AD = 4 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ și semidreapta $[AC$ este bisectoarea unghiului $\angle BAD$, atunci:

- Arată că triunghiul ADC este isoscel.
- Demonstrează că triunghiurile ADC și ACB sunt asemenea.
- Determină perimetrul trapezului $ABCD$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnoși

Soluție: a) semidreapta $[AC$ bisectoarea unghiului

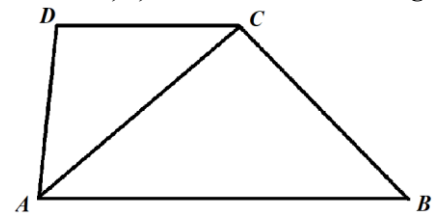
$$\angle BAD \Rightarrow \angle CAD \equiv \angle BAC \quad (1); \quad AB \parallel CD \Rightarrow \angle ACD \neq \angle BAC \quad (2);$$

Din (1) și (2) rezultă că triunghiul ADC este isoscel.

b) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ adevărat (3); Din (1) și (3)

rezultă că triunghiurile ADC și ACB sunt asemenea.

c) Din punctul **a)** rezultă $CD = 4 \text{ cm}$. Din punctele **a)** și **b)** rezultă $AC = BC = 6 \text{ cm}$. Perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu $AB + BC + CD + DA = 9 + 6 + 4 + 4 = 23 \text{ cm}$.



Problema 4.

Se consideră triunghiul ABC și punctul $M \in (BC)$, astfel încât $\frac{BM}{CM} = \frac{2}{3}$. Dacă dreapta care conține punctul M și este paralelă cu AC intersectează latura AB în punctul D , atunci arătați că:

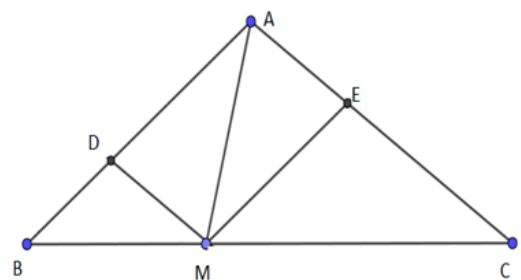
- $DM = AC \cdot \frac{2}{5};$
- $AM < \frac{2}{5} \cdot AC + \frac{3}{5} \cdot AB.$

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: a) $\frac{BM}{CM} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{2}{5}; \quad DM \parallel AC \Rightarrow$

$$\triangle BMC \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{DM}{AC} \Rightarrow DM = AC \cdot \frac{2}{5}.$$

b) $\frac{BM}{CM} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = \frac{3}{5} \cdot AB;$



Se aplică inegalitatea triunghiului în $\triangle ADM$ și rezultă $AM < DM + AD \Leftrightarrow AM < AC \cdot \frac{2}{5} + AB \cdot \frac{3}{5}.$

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct, **b)** 2 puncte, **c)** 4 puncte; **Problema 2. a)** 3 puncte, **b)** 4 puncte; **Problema 3. a)** 2 puncte, **b)** 3 puncte, **c)** 42 puncte; **Problema 4. a)** 2 puncte, **b)** 5 puncte.

Problema 1.

Grupul de prieteni ai Iuliei au hotărât să-i cumpere de ziua ei un cadou. Au stabilit că toți o să contribuie cu aceeași sumă de bani. Cu suma de bani pe care și-au propus să o folosească pentru cumpărarea cadoului au identificat mai multe opțiuni. Au hotărât să se întâlnească cu toții la un mall și să aleagă împreună cadoul pentru Iulia. La ora fixată pentru întâlnire patru dintre ei nu erau prezenți. Au refăcut calculele și au constatat că pentru strângerea sumei stabilită inițial fiecare trebuie să contribuie cu opt lei mai mult. Între timp au ajuns la mall cei patru absenți împreună cu alți cinci prieteni ai Iulie care doreau și ei să participe la cumpărarea cadoului. În aceste condiții fiecare a contribuit cu șapte lei mai puțin decât se hotărâse inițial. Câți prieteni au participat, în final, la cumpărarea cadoului?

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: Dacă se notează cu n numărul inițial al prietenilor și cu s suma stabilită inițial ca aport al fiecăruia la cumpărarea cadoului rezultă: $n \cdot s = (n-4)(s+8) = (n+5)(s-7) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} s = 2n - 8 \\ 7n - 5s = -35 \end{cases} \Rightarrow n = 25. \text{ Numărul prietenilor care au participat, în final, la cumpărarea cadoului este } 30.$$

Problema 2.

a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $x, y \in (0, +\infty)$, atunci arătați că: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$. (Inegalitatea Titu Andreescu)

b) Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci: $\frac{2ac}{2ac+b^2} + \frac{2ab}{2ab+c^2} + \frac{2bc}{2bc+a^2} \leq 2$.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: a) $(a^2y + b^2x)(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$, adevărat.

$$b) \frac{2ac}{2ac+b^2} + \frac{2ab}{2ab+c^2} + \frac{2bc}{2bc+a^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{b^2}{2ac+b^2} + 1 - \frac{c^2}{2ab+c^2} + 1 - \frac{a^2}{2bc+a^2} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{2ac+b^2} + \frac{c^2}{2ab+c^2} + \frac{a^2}{2bc+a^2} \geq 1. \text{ Din punctul a) rezultă că}$$

$$\frac{b^2}{2ac+b^2} + \frac{c^2}{2ab+c^2} + \frac{a^2}{2bc+a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2} = 1, \text{ deci inegalitatea de la punctul b)}$$

este adevărată.

Problema 3.

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare.

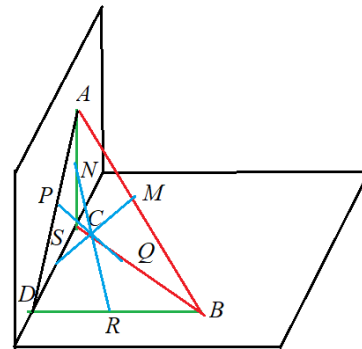
a) Dacă planele (ACD) și (BCD) sunt perpendiculare, proiecția lui A pe planul (BCD) este C și proiecția lui B pe planul (ACD) este D , atunci demonstrați că $AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2$.

b) Dacă M este mijlocul segmentului (AB) , N este mijlocul segmentului (AC) , P este mijlocul segmentului (AD) , Q este mijlocul segmentului (BC) , R este mijlocul segmentului (BD) și S este mijlocul segmentului (DC) , atunci demonstrați că dreptele MS , NR și PQ sunt concurente.

Viorica Stoianovici, Călărași

Soluție: a) $AC \perp d$, $C \in d$ și $\alpha \perp \beta \Rightarrow AC \perp \beta$ (1); din $BC \subset \beta$ și (1) rezultă $AC \perp BC \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (2)
 $BD \perp DC \Rightarrow BC^2 = BD^2 + CD^2$ (3); din (2) și (3) rezultă
 $AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2$.

b) Pentru că MP este linie mijlocie în triunghiul BAD și QS este linie mijlocie în triunghiul $BCD \Rightarrow MP \parallel QS$ și $MP = QS = \frac{BD}{2} \Rightarrow MPSQ$ paralelogram deci punctul de intersecție al dreptelor MS și PQ este mijlocul segmentului $[MS]$ (1). Pentru că MR este linie mijlocie în



triunghiul BAD și NS este linie mijlocie în triunghiul $BCD \Rightarrow MR \parallel NS$ și $MR = NS = \frac{AD}{2} \Rightarrow MRSN$ paralelogram deci punctul de intersecție al dreptelor MS și NR este mijlocul segmentului $[MS]$ (2). Din (1) și (2) rezultă că dreptele MS , NR și PQ sunt concurente.

Problema 4.

Dacă $ABCD A'B'C'D'$ este un cub, punctul M este mijlocul muchiei $[BC]$, punctul N este mijlocul segmentului $[D'M]$, iar P este punctul de intersecție al dreptelor $D'B$ și CN , atunci arătați că $D'B \perp (A'DP)$.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: Considerăm că lungimea muchiei cubului este $a \in (0, +\infty)$. Din aplicarea teoremei lui Menelaus în

$$\Delta D'BM, \text{ cu transversala } C-N-P, \Rightarrow \frac{D'P}{PB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MN}{ND'} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{D'P}{PB} = \frac{1}{2} \Rightarrow D'P = \frac{1}{3} \cdot D'B = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Dacă $A'X \perp D'B$, $X \in D'B$, din aplicarea teoremei catetei în

$$\Delta A'D'B \Rightarrow a^2 = D'X \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow D'X = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow X=P \Rightarrow$$

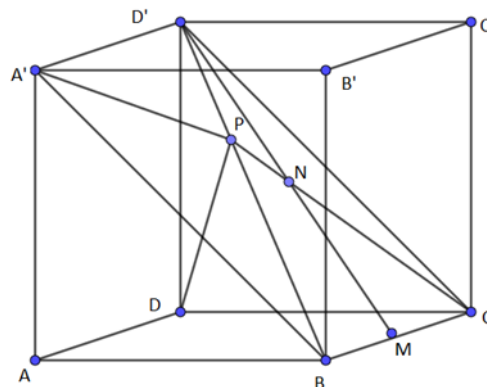
$A'P \perp D'B$ (1).

Dacă $DY \perp D'B$, $Y \in D'B$, din aplicarea teoremei catetei în

$$\Delta D'DB \Rightarrow a^2 = D'Y \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow D'Y = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow Y=P \Rightarrow DP \perp$$

$D'B$ (2)

Cum $A'P, DP \subset (A'PD)$, din (1), (2) $\Rightarrow D'B \perp (A'DP)$.



Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. 7 puncte; **Problema 2. a)** 3 puncte, **b)** 4 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte, **b)** 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.