OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a V-a

1. a) Să se demonstreze că numărul $a = 5^{2n+1} \cdot 4^{3n+2} + 10^{2n+1} \cdot 2^{4n+1}$ este pătrat perfect.
   b) Să se demonstreze că numărul $b = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2014} - 5$ nu este pătrat perfect.

Prof. Sorina Stoian

2. Fie mulţimile: $A = \{p^2 | \, p \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5n + 2 | \, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{7m + 3 | \, m \in \mathbb{N}\}$ şi $D = \{9^k | \, k \in \mathbb{N}^*, \ k \leq 2012\}$. Arătaţi că:
   a) mulţimile A şi B sunt disjuncte;
   b) numărul 2012 este element comun al mulţimilor B şi C;
   c) mulţimea D este o submulţime a mulţimii A;
   d) numărul 9^{2011} se poate scrie ca o sumă de două cuburi perfecte, iar numărul 9^{2012} se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Prof. Dorina Bocu

3. Doi copii iau pe rând bomboane dintr-un pachet. Primul ia o bomboană, al doilea două, apoi primul trei, al doilea patru şi aşa mai departe. Când numărul bomboanelor rămase în pachet este mai mic decât cel necesar, atunci cel căruia îi vine rândul ia toate bomboanele. Câte bomboane au fost la început dacă primul copil a luat în total 101 bomboane?

Prof. Marinela Canu

4. Să se determine numărul $\overline{abc}$ care verifică relaţia:

$$\overline{ab}\left(b^2 + c^2\right) = 2014.$$

G.M.B. Nr. 12/2013

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a VI-a

1. Determinaţi toate perechile de cifre nenule (x, y) cu proprietatea că

$$\frac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}} = \frac{4}{7}.$$

G.M.B. Nr. 11/2013

2. Considerăm mulţimile: $A = \{2m|\, m \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{3n - 2|\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Să se arate că $A \cap B \neq \emptyset$. Să se determine numărul de elemente ale mulţimii

$$A \cap B \cap \{p \in \mathbb{N}|\, p \leq 2014\}.$$

Prof. Emanuel Munteanu

3. Fie punctele B, C şi D sunt situate pe o semidreaptă cu originea în A, astfel încât $AB = 2^{2012}$ cm, $AC = 2^{2013}$ cm şi $AD = 2^{2014}$ cm.

   a) Arătaţi că B este mijlocul segmentului $[AC]$.
   b) Calculaţi lungimea segmentului $[MN]$, unde M este mijlocul lui$[AB]$, iar N este mijlocul lui $[CD]$.
   c) Determinaţi numărul de triunghiuri neisoscele sau echilaterale (necongruente două câte două) care au lungimile laturilor egale cu lungimile unor segmente determinate de puncte ale mulţimii $\{A, B, C, D, N\}$.

Prof. Dorina Bocu

4. Două unghiuri suplementare au o latură comună, iar bisectoarele lor formează un unghi de $60°$. Determinaţi măsurile unghiurilor.

G.M.B. Nr. 10/2013

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a VII-a

1. Să se demonstreze că pentru orice numere pozitive a, b şi c este satisfăcută inegalitatea
$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

Prof. Marilena Canu

2. a) Dacă fracţia $\frac{5n-1}{4n+9}$ şi inversul său sunt simultan numere întregi, aflaţi numărul întreg n.

   b) Fie fracţiile
$$\frac{2014}{14}, \frac{2015}{15}, \frac{2016}{16}, \ldots, \frac{2999}{999}.$$
   Câte dintre aceste fracţii sunt numere naturale?

Prof. Camelia Postolache

3. Considerăm numerele naturale de forma $\overline{xyz}$, cu proprietatea
$$\sqrt{11-x} + \sqrt{10-y} + \sqrt{9-z} + \sqrt{x+y+z} \in \mathbb{N}.$$
Să se arate că suma tuturor acestor numere $\overline{xyz}$ este divizibilă cu 7.

Prof. Sorina Stoian

4. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ şi înălţimea AD $(D \in BC)$. Notăm cu S intersecţia dintre bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAD}$ şi $\widehat{ABC}$, iar cu T intersecţia bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{ACB}$. Dacă M şi N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv AB, arătaţi că punctele M, S, T şi N sunt coliniare.

G.M.B. Nr. 5/2013

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm numerele reale:
$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}$$
şi
$$b = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}.$$
   a) Arătaţi că $(a+b+1)^2 \in \mathbb{N}$.
   b) Aflaţi n pentru care $a+b = \sqrt{2014 - \sqrt{8052}}$.
   c) Demonstraţi că numărul $\sqrt{n + \sqrt{n+1}}$ este iraţional, pentru oricare număr natural nenul n.

Prof. Dorina Bocu

2. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Arătaţi că
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Prof. dr. Ioana Maşca

3. Arătaţi că ecuaţia $m^2 - 2013 = 2^n$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale.

G.M.B. Nr. 4/2013

4. În prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$, $DA \perp (ABC)$, $DA = AB = 6$ cm, G este centrul de greutate al triunghiului DEF, O este centrul feţei $BCFE$, iar P este mijlocul muchiei $[EF]$.
   a) Arătaţi că $AF \parallel (DBP)$;
   b) Calculaţi măsura unghiului format de dreptele OG şi FC;
   c) Calculaţi distanţa de la BC la planul (AFE).

Prof. Dorina Bocu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.